تحقیقات بتن
سال هفدهم، شمارهٔ اول
بهار ۱۴۰۳
ص ۳۳ – ۲۱
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۱۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۹

تعیین تنش برشی و نرمال در مرز مشترک بتن و ورق FRP به روش بدون المان گالرکین و مقایسه نتایج آن با نرم افزار المان محدود آباکوس

مجتبی حقگو
دانشجوی دکترا عمران -سازه، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.
آرش بهار *
استادیار ، گروه عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

چکیده

در این مقاله، مدلی بر اساس روش المان آزاد گلرکین (EFG) در چارچوب فرض‌های الاستیک خطی، برای به‌دست آوردن توزیع تنش بین سطحی در تیر بتنی تقویت شده با ورق FRP توسعه داده شده است. در این مدل، رفتار لایهٔ چسب میان سطوح با استفاده از خواص الاستیک آن به صورت فنرهایی خطی در نظر گرفته شده است و از توابع تقریب MLS برای تقریب کل میدان‌های جابجایی استفاده شده است. همچنین با در نظر گرفتن شرط چسبندگی کامل میان سطوح نیز نتایج محاسبه و ارائه گردیده است. نتایج این مدل با مدل FEM در نرم‌افزار آباکوس برای تیر و ورق FRP مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد که روش EFG انطباق خوبی با نتایج مدل آباکوس دارد. در انتهای کار مطالعه پارامتریک انجام شده است و تأثیرات ضخامت لایه چسب و ورق FRP در مقادیر تنش برشی و نرمال چسب بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: ورق FRP، لایه چسب، تنش برشی، لایه چسبنده.

* نویسنده مسئول: bahar@guilan.ac.ir

۱- مقدمه

طی دو دهه ی اخیر تقویت تیرهای بتنی با چسباندن صفحات فولادی و یا FRP مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. این روش به‌دلیل بهبود قابل ملاحظه در سختی و استحکام یک سازه ی موجود با کمترین اثر بر روی سایر المانهای مجاور، می‌تواند در مهندسی سازه بسیار مفید باشد. نشان داده شده است که مهم‌ترین حالت شکست در این تیر تقویت شده، به‌دلیل جدا شدن تیر و صفحهٔ تقویت کننده در اثر تنش های نرمال و برشی بین سطحی در سطح اتصال آنها رخ می دهد. این تنش ها به خصوص در نقاط انتهایی تماس ورق و تیر، تمرکز تنش بسیار زیادی را نشان می دهند که یکی از مهم ترین عوامل جدایی و شکست این سازه‌ها است. کارهای تجربی بسیاری برای تعیین تنش‌های بین سطحی و فرایند جدا شدن FRP از بتن انجام گرفته است [۱-۷]. با این حال با توجه به پیچیدگی میدان تنش در سطح میانی، این روش‌ها با دشواری‌هایی روبرو هستند. توزیع تنش‌های نرمال و برشی در سطح تماس و در نتیجه پدیدهٔ جدا شدن دو سطح بسیار پیچیده است. کارهای تحلیلی بسیاری با ارائهٔ مدل‌های تقریبی به منظور دستیابی به حل‌های بسته برای تنش‌های بین سطحی انجام گرفته است. در این روش‌ها فرض‌های متفاوتی در مورد توزیع تنش‌های نرمال و برشی در لایه‌ی چسب و همچنین بتن و FRP مطرح گردیده است. این حل‌ها با اعمال معادلات تعادل و سازگاری، تنش‌های نرمال و برشی بین سطوح را در ناحیه الاستیک محاسبه می‌کنند.[۸-۲۳]. تعداد زیاد پارامترهای تأثیرگذار، در این حل‌ها و دشواری حل برای شرایط هندسی و تکیه‌گاهی مختلف از جملهٔ ایرادات وارد بر حل‌های مبتنی بر این رویکرد است.

در کنار روش‌های آزمایشگاهی و تحلیلی، انواع روش‌های عددی همچون روش‌های اجزاء محدود[۲۴-۳۸]، اجزاء محدود توسعه یافته [۳۹-۴۲] نیز برای شبیه‌سازی و تحلیل تنش‌های بین سطحی و پیش‌بینی جدایش سطوح بتن و صفحات تقویت کننده به کار گرفته شده است. روش‌های عددی با توجه به این که فرضیات ساده‌کنندهٔ کمتری در آن‌ها لحاظ می شوند، می‌توانند پاسخ‌های مناسب تری به دست دهند. با این حال مسالهٔ مش بندی و همگرایی این روش‌ها نیز می تواند مشکلاتی در این روش‌ها ایجاد کند. این روش ها گاه در ارتباط با روش های تحلیلی ارائه گردیده اند. در حل های مبتنی بر اجزا محدود، گاه از مفاهیم مکانیک شکست [۲۶-۲۸, ۳۷, ۴۳] و گاه از مدل های چسبنده کوهسیو[1] برای پیش بینی جدایش سطوح استفاده شده است [۳۸, ۴۴, ۴۵].

به‌طور کلی در روش‌های تحلیلی و عددی، انواع مدل‌های یک بعدی، دو بعدیِ تنش صفحه‌ای و سه بعدی برای مسألهٔ تیر تقویت شده ارائه گردیده‌اند. در مدل‌های یک بعدی هم تیر و هم ورق FRP با المان‌های واحد یک بعدی مدل گردیده اند[۲۳]. در مدل‌های دو بعدی و سه بعدی، بتن با المان های صفحه ای دو بعدی و المان های جامد سه بعدی مدل گردیده و ورق FRP معمولا به صورت المان های صفحه ای یا پوسته ای مدل می شود[۳۶]. در بررسی چسبندگی ورق FRP و بتن، گاه لایه چسب به صورت فیزیکی مدل گردیده[۲۶]، گاه با قید چسبندگی کامل[۲۴, ۲۵, ۲۷] و گاه با در نظر گرفتن لغزش نسبی میان دو سطح[۲۸-۳۰, ۴۶]، بدون حضور چسب مدل ارائه گردیده است. در بعضی از موارد هم روش‌های خطی و غیر خطی بررسی شده‌اند [۴۶, ۴۷]. در این پژوهش از قید چسبندگی کامل بین بتن و ورق FRP استفاده شده است و برای تعیین تنش های وارده در مرز مشترک بتن و ورق FRP از حل عددی بدون شبکه گالرکین استفاده شده است.

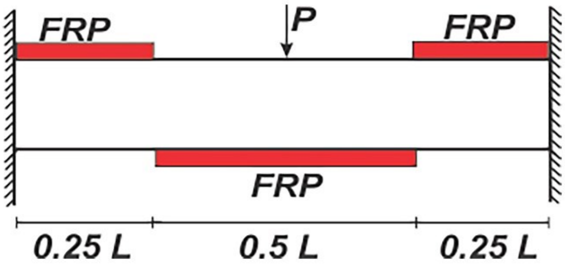
روش‌های بدون شبکه دسته‌ای از روش‌های عددی هستند که در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری ازمحققان قرار گرفته است. روش‌های بدون شبکه تنها از مجموعه ای از گره ها که داخل دامنه و مرزها پخش شده اند برای گسسته‌سازی معادلات استفاده می‌کند. در این گونه روش‌ها نیازی به شبکه‌بندی متعارف مانند آنچه در روش‌های المان محدود نیاز است، وجود ندارد و تقریب-های عددی حل معادله دیفرانسیلی، نه بر مبنای المان ها و روابط پیوستگی بین آن‌ها، بلکه بر مبنای مجموعه‌ای از نقاط(گره‌ها) انجام می پذیرد و هیچ گونه المان بندی و یا مشخصات و ویژگی هایی برای پیوستگی نقاط مشترک برای ساخت معادلات گسسته سازی نیاز نیست[۴۸]. از این رو توسعهٔ این مدل‌ها برای مساله تیر تقویت شده، در حل مشکلات مربوط به وابستگی به مش، می‌تواند راهگشا باشد. روش المان آزاد گالرکین[2] [۴۹] یکی از روش‌های محبوب و پرکاربرد بدون شبکه است که از روش MLS برای

[1] Cohesive Zone

[2] Element Free Galerkin

تقریب جابجایی‌ها استفاده می کند.

در این پژوهش، در ادامه‌ی حل‌های عددی ارائه شده، روش المان آزاد گلرکین در چارچوب فرض‌های الاستیک خطی، برای حل مساله تیر بتنی تقویت شده با ورق FRP توسعه داده شده است. باوجود حجم بالای محاسبات در روش EFG، با توجه به پایداری بالای آن، از این روش می توان برای محاسبهٔ میدان پیچیدهٔ تنش در سطح میان بتن و FRP استفاده نمود. بدین منظور مدل دو بعدی تنش صفحه ای برای تیر تقویت شدهٔ نشان داده شده در شکل ۱، ارائه گردیده است. برای مدل سازی چسبندگی سطوح، هم از فرض چسبندگی کامل با استفاده از روش پنالتی و هم از مدل فنرهای خطی[۲۸] برای شبیه سازی رفتار الاستیک ایزوتروپیک لایهٔ چسب استفاده شده است. در مدل ارائه شده با فرض ثابت بودن میدان تنش در عرض لایهٔ چسب میدان‌های تنش نرمال و برشی در سطح تماس به دست آورده شده اند. نتایج حاصل با نتایج مدل مشابه روش اجزاء محدود در نرم افزار Abaqus مقایسه گردیده‌اند. در بخش بعدی مفروضات در نظر گرفته شده در این حل تحلیلی ارائه می‌شود.



شکل ۱- تیر بتنی و ورق FRP

۲- فرضیات مسئله

در این پژوهش از فرضیات زیر استفاده شده است.

- بتن و FRP رفتار کشسانی خطی از خود نشان می دهند و اثر تقویت کننده فولاد در بتن نادیده گرفته شده است. همچنین فرض شده است که تیر بتنی ترک نمی خورد که با توجه به هندسه و طول تیر در این تحقیق، فرض قابل قبولی هست.
- لایه چسب رفتار خطی دارد.
- چسبندگی کامل بین ورق FRP و بتن برقرار است.

در بخش بعدی تابع حداقل مربعات متحرک (MLS) مورد استفاده در روش EFG ارائه می شود.

۳- ایجاد توابع تقریب MLS

بنابر روش MLS، تابع نامعلوم $u(\mathbf{x})$ با تابع $u^h(\boldsymbol{x})$ به صورت زیر تقریب داده می‌شود:

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ برداری از توابع پایه‌ی چند جمله‌ای و $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ برداری از ضرایب نامعلوم بوده که به مکان $\mathbf{x}$ بستگی دارد. همچنین m تعداد جملات توابع پایه است. توابع پایه‌ی رایج در روش MLS توابع پایه‌ی خطی و مرتبه‌ی ۲ می‌باشند. پایه‌های مرتبه‌ی ۲ در فضای دو بعدی به‌صورت زیر بیان می گردند:

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \qquad (۲)$$

در روش MLS ضرایب $a_j(\boldsymbol{x})$ از کمینه کردن تابع مربع وزن‌دار باقیمانده به دست می‌آیند. این تابع به صورت زیر بیان می گردد:

$$J = \sum_{I=1}^{n} W(\mathbf{x}-\mathbf{x_I})[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x_I})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2 \qquad (۳)$$

که در آن u_I پارامترهای گرهی مربوط به متغیر میدان و n تعداد گره‌های موجود در اطراف نقطه‌ی $\mathbf{x}$ است که در درون دامنه‌ی پوشش قرار دارند. همچنین $W(\mathbf{x}-\mathbf{x_I})$ تابع وزن است. در این پژوهش با توجه به آن‌که در مساله‌ی خمش صفحات به پیوستگیِ تا مرتبه‌ی دومِ مشتقات نیاز است، از تابع وزن اسپیلاین مرتبه‌ی ۴ استفاده شده است. در حالت یک بعدی این تابع به صورت زیر بیان می گردد:

$$W(r) = \begin{cases} 1-6r^2+8r^3-3r^4 & for\ 0 \le r \le 1 \\ 0 & for\ r \ge 1 \end{cases} \qquad (۴)$$

تابع وزن می‌بایست در خارج از دامنه‌ی پوشش برابر صفر باشد. شکل دامنه‌ی پوشش را می‌توان به صورت دلخواه انتخاب کرد. پرکاربردترین شکل‌های دامنه‌ی پوشش شکل‌های مربعی و دایره-ای هستند که در این پژوهش از دامنه‌ی پوشش مربعی استفاده شده است. تابع وزن در یک دامنه‌ی پوشش مربعی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$W(\boldsymbol{r}) = W(r_x)W(r_y) \qquad (۵)$$

که در آن:

$$r_x = \frac{\|x-x_I\|}{d_x} \quad ; \quad r_y = \frac{\|y-y_I\|}{d_y} \qquad (۶)$$

پارامترهای d_x و d_y می‌بایست به گونه‌ای تعیین گردند که به تعداد کافی گره در درون دامنه‌ی پوشش قرار بگیرد. یک انتخاب

مناسب برای این پارامترها می‌تواند به‌گونه‌ای باشد که مقادیر تابع وزن را به‌طور هموار در مرز دامنه‌ی پوشش به سمت صفر میل دهد. برای این کار می‌بایست d_x و d_y به ترتیب برابر نصف طول دامنه-ی پوشش در جهات x و y باشند. در این پژوهش از این مقادیر برای d_x و d_y استفاده شده است.

حال ضرایب $\mathbf{a(x)}$ را با کمینه کردن تابعی ارائه شده در رابطه‌ی (۳) به شکل زیر می‌توان به دست آورد:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \tag{۷}$$

که به دستگاه معادلات خطی زیر منجر می‌شود:

$$\mathbf{A(x)a(x)} = \mathbf{B(x)U_s} \tag{۸}$$

که در آن

$$\mathbf{A(x)} = \sum_{I=1}^{n} W(\mathbf{x}-\mathbf{x_I})\mathbf{p}(\mathbf{x_I})\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x_I}) \tag{۹}$$

$$\mathbf{B(x)} = [W(\mathbf{x}-\mathbf{x_1})\mathbf{p}(\mathbf{x_1}), \dots, W(\mathbf{x} - \mathbf{x_n})\mathbf{p}(\mathbf{x_n})] \tag{۱۰}$$

$$\mathbf{U_s} = \{u_1 \;\; u_2 \;\; \dots \;\; u_n\}^T \tag{۱۱}$$

ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تابع مقدار تابع وزن و مقدار توابع پایه در گره‌ها هستند و مشتقات آن‌ها نیز به سادگی و با محاسبه‌ی مشتق تابع وزن قابل محاسبه است. با جایگزین کردن رابطه‌ی (۱۱) در رابطه‌ی (۱)، تقریب MLS را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n} \phi_I(\mathbf{x})u_I = \mathbf{\Phi(x)U_s} \tag{۱۲}$$

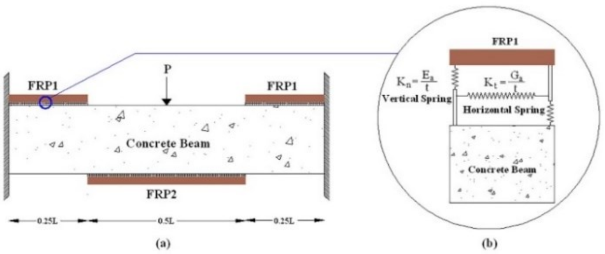
در رابطه‌ی(۱۲)، $\mathbf{\Phi(x)}$ ماتریس توابع شکل بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{\Phi(x)} = [\phi_1(\mathbf{x}) \;\; \phi_2(\mathbf{x}) \dots \;\; \phi_n(\mathbf{x})] = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{۱۳}$$

همانطور که در بخش بعدی مشاهده خواهد شد، در محاسبه‌ی ماتریس‌های سختی به مشتقات مرتبه‌ی اول متغیرهای میدان (که در اینجا مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه هستند) نیاز است. در نتیجه می‌بایست مشتقات توابع شکل محاسبه گردند. در روش MLS چون هم توابع پایه و هم ضرایب آن‌ها تابع مکان‌اند، روند مشتق-گیری پیچیده‌گی‌های بیشتری دارد. بلیچکو و همکاران[۵۰] روند سر راستی را برای محاسبه‌ی مشتقات توابع شکل MLS پیشنهاد دادند. یادآوری می‌شود که توابع شکل MLS خاصیت دلتای کرونیکر را ندارند ($\varphi_I(x_J) \neq \delta_{IJ}$) و نتیجتا مقادیر پارامترهای گرهی با مقادیر متغیر میدان در گره‌ها برابر نیستند($u^h(x_I) \neq u_I$). در ادامه مدلسازی رفتار چسب با فنر خطی ارائه می شود.

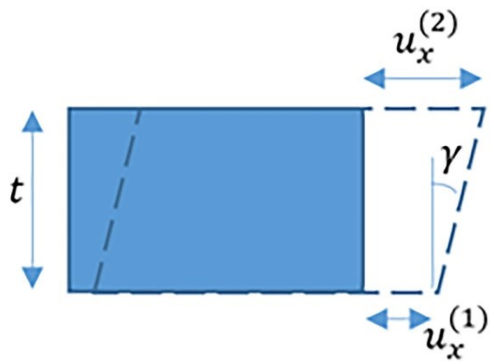
٤- مدل‌سازی رفتار چسب با فنر خطی

در این بخش، رفتار الاستیک و انرژی تغییر شکل چسب با فنرهای خطی معادل مدل سازی می‌شود. بدین منظور المانِ لایه چسب مطابق شکل شماره ۲ مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل۲- معادل سازی لایه چسب با فنر خطی

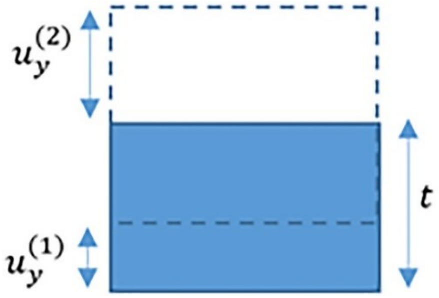
تغییر شکل کلی این المان صفحه‌ای را می‌توان مجموع سه تغییر شکل برشی، کششی در راستای ضخامت و کششی در راستای طول لایه‌ی چسب در نظر گرفت. در عموم مدل‌های ارائه شده برای چسب، از تنش نرمال طولی که همانند تغییر شکل طولی چسب است، در برابر تنش‌های عمودی و برشی وارد بر چسب صرف نظر شده است. این فرض در لایه‌های چسب نازک و بسیار بلند (که در مساله‌ی ما شرایط آن برقرار است) بسیار منطقی و قابل توجیه است. در نتیجه در اینجا تنها اثر تنش‌های برشی و نرمال عمود بر لایه‌ی چسب در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در شکل۳ نشان داده شده است، با فرض ثابت بودن تنش‌ها در لایهٔ نازک چسب، تغییر شکل برشی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:



شکل۳- تغییر شکل برشی لایه چسب را نشان می دهد

$$\gamma_{xy} \approx \tan(\gamma) = \frac{u_x^{(2)} - u_x^{(1)}}{t} \qquad (۱۴)$$

تغییر شکل نرمال در جهت ضخامت را نیز با توجه به شکل۴، می‌توان با رابطه‌ی (۱۵) تقریب زد:



شکل۴- تغییر شکل عمودی چسب را نشان می دهد

$$\varepsilon_y = \frac{u_y^{(2)} - u_y^{(1)}}{t} \qquad (۱۵)$$

با در نظر گرفتن رفتار خطی برای چسب، تنش‌های نرمال و برشی می‌توانند با استفاده از فنرهای معادل عمودی و برشی میان تیر و ورق FRP در نظر گرفته شوند. مقدار سختی بر واحد عمق تیرِ این فنرهای عمودی و برشی به ترتیب $K_n = E_a/t$ و $K_t = G_a/t$ است. در بخش بعدی معادلات گسسته در روش EFG ارائه می شود.

۵- استخراج معادلات گسسته با روش EFG

در این تحقیق از رفتار خطی برای توصیف تیر بتنی و FRP و همچنین از فنرهای معادل برای مدل‌سازی چسب استفاده می‌شود. در روابطی که در ادامه ارائه می‌گردند، جنس ۱ همان تیر بتنی و جنس ۲ همان ورق FRP در نظر گرفته شده است. انرژی پتانسیل کل را برای این مساله می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد [۴۸]:

$$\begin{aligned} L = U + W = & \sum_{k=1,2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D}_k \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_{\mathrm{k}} \right) \\ & + \int_{\Gamma_s} \frac{1}{2} K_n \left(u_y^{(2)} - u_y^{(1)}\right)^2 d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s} \frac{1}{2} K_t \left(u_x^{(2)} - u_x^{(1)}\right)^2 d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Gamma \\ & - \sum_{i=1}^{n_{CF}} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{u}_i \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

در این رابطه $\boldsymbol{b}$ نیروی حجمی، $\bar{\boldsymbol{t}}$ بردار ترکشن در مرزها، $\boldsymbol{F_i}$ بار متمرکز i ام و $\boldsymbol{u_i}$ بردار جابجایی در محل بار i ام است. به علاوه Ω دامنه ی مساله، Γ_s مرز چسب و n_{CF} تعداد نیروهای متمرکز می‌باشند. همچنین $\boldsymbol{D_k}$ ماتریس سختی جنس kام در حالت تنش صفحه ای ، $\boldsymbol{\varepsilon}$ بردار کرنش و $\boldsymbol{u}$ بردار جابجایی صفحه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

$$\boldsymbol{D_k} = \frac{E_k}{(1 - \upsilon_k^2)} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon_k & 0 \\ \upsilon_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \upsilon_k)/2 \end{bmatrix}$$

در روابط فوق E_k مدول یانگ و υ_k ضریب پواسون جنس k ام است. با توجه به عدم برقراری خاصیت دلتای کرونیکر در توابع تقریب MLS، اعمال شرایط مرزی اساسی در روش EFG نمی‌تواند همچون روش اجزاء محدود به صورت مستقیم و بر روی دستگاه معادلات گسسته انجام پذیرد. این شرایط مرزی می‌بایست توسط توابع قیدی به تابعی انرژی پتانسیل کل (۱۶) اضافه و اعمال گردند. دو روش مرسوم برای اعمال این قیود روش‌های ضرایب لاگرانژ و پنالتی هستند. در اینجا با استفاده از روش پنالتی این قیود اعمال می شود. با توجه به تقارن موجود در سازه ی شکل ۱ نصف سازه مدل می گردد. در این حالت در تکیه‌گاه گیردار مؤلفه‌های u_x و u_y و در شرایط مرزی متقارن u_x و نیز چرخش مقید می‌گردند. این شرایط مرزی را به‌صورت مختصر زیر می‌توان بیان کرد:

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u}} \leftarrow \Gamma_{\boldsymbol{u}} \text{ بر روی مرز اساسی} \qquad (۱۸)$$

که در آن $\overline{\boldsymbol{u}}$ برداری شامل مقادیر مشخص شده‌ی جابجایی و یا چرخش بر روی مرز اساسی صفحه است. بردار $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{L}_b \boldsymbol{u} \qquad (۱۹)$$

$\boldsymbol{L}_b$ برداری از عملگرهای دیفرانسیلی است که به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\boldsymbol{L}_b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$:تکیه‌گاه گیردار

$$\boldsymbol{L}_b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$:شرط تقارن (۲۰)

در مسأله‌ی مورد نظر مؤلفه‌های بردار $\overline{\boldsymbol{u}}$ برابر صفر هستند. در نهایت انرژی پتانسیل کل ارائه شده در معادله‌ی (۱۴) را به‌صورت زیر اصلاح و اصل کمینه ی انرژی پتانسیل به‌صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\tilde{L}=L+\int_{\Gamma_{\boldsymbol{u}}}\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{u}}-\overline{\boldsymbol{u}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{u}}-\overline{\boldsymbol{u}})d\Gamma \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{L}=0\rightarrow\sum_{k=1,2}\left(\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega_{\mathrm{k}}\right)&+\int_{\Gamma_s}\delta\left(u_y^{(2)}-u_y^{(1)}\right)K_n\left(u_y^{(2)}-u_y^{(1)}\right)d\Gamma\\ &+\int_{\Gamma_s}\delta\left(u_x^{(2)}-u_x^{(1)}\right)K_t\left(u_x^{(2)}-u_x^{(1)}\right)d\Gamma-\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}\,d\Gamma-\sum_{i=1}^{n_{CF}}\boldsymbol{F}_i\delta\boldsymbol{u}_i\\ &+\int_{\Gamma_{\boldsymbol{u}}}\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}-\overline{\boldsymbol{u}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\boldsymbol{u}}-\overline{\boldsymbol{u}})d\Gamma=0\end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1,2}\left(\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega_{\mathrm{k}}\right)&+\int_{\Gamma_s}\delta\left(\boldsymbol{u}^{(2)}-\boldsymbol{u}^{(1)}\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}}\left(\boldsymbol{u}^{(2)}-\boldsymbol{u}^{(1)}\right)d\Gamma-\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}\,d\Gamma\\ &-\sum_{i=1}^{n_{CF}}\boldsymbol{F}_i\delta\boldsymbol{u}_i+\int_{\Gamma_{\boldsymbol{u}}}\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}-\overline{\boldsymbol{u}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\boldsymbol{u}}-\overline{\boldsymbol{u}})d\Gamma=0\end{aligned} \tag{۲۳}$$

در روابط فوق $\mathbf{u}^{(k)}$ بردار جابجایی ماده ی $\boldsymbol{k}$ام بر روی مرز چسب $\Gamma_{\boldsymbol{s}}$ است که در دامنه ی Ω_{k} می بایست تقریب زده شود. همچنین $\boldsymbol{\alpha}$ ماتریسی قطری دربردارنده‌ی ضرایب پنالتی است. ماتریس $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}}$ نیز ماتریس سختی چسب بوده که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{D_a}=\begin{bmatrix}\mathrm{K_t} & 0\\ 0 & \mathrm{K_n}\end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

برای به دست آوردن شکل گسسته‌ی معادلات، با استفاده از توابع شکل MLS، میدان جابجایی بر حسب پارامترهای گرهی مربوطه به‌صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=\begin{bmatrix}\mathrm{u_x}\\ \mathrm{u_y}\end{bmatrix}=\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}\phi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) & 0\\ 0 & \phi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{u_{x_I}}\\ \mathrm{u_{y_I}}\end{bmatrix}\\ &=\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\phi}_I\mathbf{u}_{\mathrm{I}}\,;\quad \mathbf{u}^{\mathrm{k}}=\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n_k}}\boldsymbol{\phi}_I^{\boldsymbol{k}}\,\mathbf{u}_{\mathrm{I}}^{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{۲۵}$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{k}}$ و $\boldsymbol{u}_I^{\boldsymbol{k}}$ با توجه به گره‌های دامنه ی پوشش در جنس kام تعیین می شوند. این روابط در شکل ضعیف (۲۳) جایگزین می شود. با توجه به پیوستگی توابع موجود همواره می‌توان جای انتگرال و سیگما را تغییر داد. با این توضیحات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{k}=1,2}\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{n}}\delta\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}}\left[\int_{\Omega_k}(\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}})^{\mathbf{T}}\mathbf{D_k}\left(\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{J}}\right)\mathrm{d}\Omega_k\right]\mathbf{u_J}&\\ +\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{n}}\delta\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}}\left[\int_{\Gamma_{\mathrm{s}}}\left[\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}}^{1}\quad-\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}}^{2}\right]^{\mathbf{T}}\mathbf{D_a}\left[\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{J}}^{1}\quad-\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{J}}^{2}\right]\mathrm{d}\Gamma\right]\mathbf{u_J}&\\ -\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\delta\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}}\int_{\Omega}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega-\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\delta\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}}\int_{\Gamma_{\mathrm{t}}}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}}\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_{CF}}}\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\left(\delta\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}}\right)_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}})_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{i}}&\\ +\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{n}}\delta\mathbf{u}_{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}}\left[\int_{\Gamma_{\mathbf{u}}}(\mathbf{L_b}\phi_{\mathrm{I}})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{L_b}\phi_{\mathrm{J}}\right)\mathrm{d}\Gamma\right]\mathbf{u_J}=0&\end{aligned} \tag{۲۶}$$

با توجه به این که $\delta\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{T}}$ دلخواه است دستگاه معادلات گسسته‌ی نهایی زیر حاصل می شود:

$$\left[\boldsymbol{K}+\widetilde{\boldsymbol{K}}\right]\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F} \tag{۲۷}$$

در دستگاه معادلات (۲۷)، $\mathbf{K}$ سهم سختی سازه در ماتریس سختی

کل است. این ماتریس از اعمال تقریب MLS بر جمله‌ی مربوط به کار مجازی داخلی تیر و ورق(همان تغییر انرژی کرنشی یا جمله‌ی اول) و همچنین سختی معادل لایه‌ی چسب (جمله دوم) به‌دست آمده است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{IJ}} = \sum_{\mathrm{k}=1,2}\left[\int_{\Omega_k} \boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{J}}\mathrm{d}\Omega_k\right] + \int_{\Gamma_s}[\boldsymbol{\phi}_I^1 \quad -\boldsymbol{\phi}_I^2]^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{a}}[\boldsymbol{\phi}_J^1 \quad -\boldsymbol{\phi}_J^2]\mathrm{d}\Gamma \tag{۲۸}$$

که در آن مقدار $\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}$ برابر است با :

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial \mathrm{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

ماتریس $\mathbf{K}$ از انتگرال‌گیری بر روی کل دامنه‌ی مسأله و نیز مرز چسب حاصل می‌شود. ماتریس $\widetilde{\mathbf{K}}$، ناشی از جمله‌ی اعمال قیود تکیه‌گاهی و تقارن با ضرایب پنالتی است و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_{\mathbf{IJ}} = \int_{\Gamma_{\mathbf{u}}}(\mathbf{L_b}\phi_{\mathrm{I}})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{L_b}\phi_{\mathrm{J}})\mathrm{d}\Gamma \tag{۳۰}$$

سه جمله‌ی دیگر موجود در رابطه‌ی(۲۶) که اثر بارهای خارجی را نشان می‌دهند، بردار نیروهای گرهی، $\mathbf{F}$ را ایجاد می‌کنند. مولفه-های $\mathbf{F}$ به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = \int_{\Omega}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}}\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}}\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_{CF}}}(\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{I}})_{\mathrm{i}}\mathbf{F}_{\mathrm{i}} \tag{۳۱}$$

بردار $\mathbf{U}$ بردار پارامترهای گرهی مربوط به جابجایی های تیر در کل دامنه است، که می‌دانیم با مقدار دقیق جابجایی ها در گره‌ها مساوی نیست. با این حال پس از به دست آوردن این بردار از دستگاه معادلات (۲۷)، در هر نقطه‌ی دلخواهی از دامنه می‌توان جابجایی را به دست آورد.

$$\boldsymbol{U} = \left\{\mathrm{u_x^1}\ \ \mathrm{u_y^1}\ \ \mathrm{u_x^2}\ \ \mathrm{u_y^2}\ \ldots\ \mathrm{u_x^{n_t}}\ \ \mathrm{u_y^{n_t}}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۳۲}$$

در رابطه‌ی(۳۲)، n_t تعدادکل گره‌ها در دامنه‌ی مسأله است. پس از حل معادلات و به دست آوردن پارامترهای گرهی مقدار تنش-های نرمال و برشی برای لایه‌ی چسب به صورت زیر محاسبه می-شود:

$$\sigma_y = E_a\varepsilon_y = E_a\frac{u_y^{(2)} - u_y^{(1)}}{t}sign(\bar{y}^{(2)} - \bar{y}^{(1)}) = \frac{E_a}{t}\sum_{I=1}^{n}\left([\phi_I^{(2)} \quad -\phi_I^{(1)}]u_{y,I}\right)\ sign(\bar{y}^{(2)} - \bar{y}^{(1)}) \tag{۳۳}$$

$$\tau_{xy} = G_a\varepsilon_y = G_a\frac{u_x^{(2)} - u_x^{(1)}}{t} = \frac{G_a}{t}\sum_{I=1}^{n}[\phi_I^{(2)} \quad -\phi_I^{(1)}]\,u_{x,I} \tag{۳۴}$$

در ادامه مشخصات هندسی تیر و مصالح ارائه می شود.

٦- مشخصات هندسی تیر و مصالح

طول تیر مورد استفاده در این تحقیق ۲۵۰۰ میلیمتر، طول ورق های FRP بالا هرکدام ۱۲۵۰ میلیمتر و ورق FRP پایین ۲۵۰۰ میلیمتر می باشد. ارتفاع تیر ۲۰۰ میلیمتر است. تیر تحت بار متمرکز P=50 KN قرار دارد. با توجه به تقارن، در مدلسازی نصف تیر درنظر گرفته می‌شود. در جدول ۱ مشخصات مصالح بتن و ورق FRP نشان داده شده است.

در جدول شماره ۲ مشخصات لایه چسب نیز ارائه شده است. در بخش بعدی توضیحات مدلسازی تیر بتنی باورق FRP در نرم افزار اجزا محدود آباکوس ارائه می شود.

جدول۱- مشخصات مکانیکی و هندسی بتن و FRP

مشخصات تیر بتنی				
ν_c	E_c (Mpa)	f_c (Mpa)	ارتفاع (mm)	طول (mm)
0.15	30000	30	200	5000

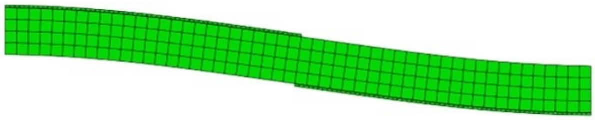
مشخصات مکانیکی ورق FRP				
ν_{FRP}	E_{FRP} (Mpa)	f_{pu} (Mpa)	ضخامت (mm)	طول (mm)
0.3	235000	4500	5	2500

جدول ۲- مشخصات مکانیکی لایه چسب

$\tau_p(MPa)$	$E_a(GPa)$	ضخامت(mm)
2.4	3.5	1

۷- مدلسازی در نرم افزار اجزا محدود (آباکوس)

در مدلسازی تیر بتنی در آباکوس از المان تنش صفحه‌ای CPS4R با ۴ نقطه انتگرال‌گیری استفاده شده است که این المان در حل، از فرمول‌بندی کاهش‌یافته بهره می‌گیرد. تعداد گره های تعریف شده در تیر بتنی ۵۰۵ و تعداد المان های تعریف شده ۴۰۰ المان می باشد. در ورق FRP تعداد گره و المان تعریف شده به ترتیب ۵۱۰ و ۲۵۲ می باشد. برای مدلسازی رفتار لایه چسب به دو صورت خطی در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر فرض بر این است که اتصال به صورت کامل برقرار است. در این پژوهش از نرم افزار آباکوس ورژن ۲۰۱۷ استفاده شده است. شکل ۵ مدل تیر در آباکوس را نشان می دهد.

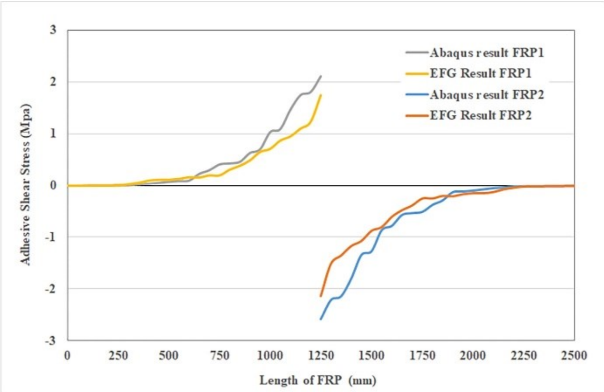


شکل۵- مدل تغییرشکل یافته تیر در آباکوس

۸- نتایج بدست آمده

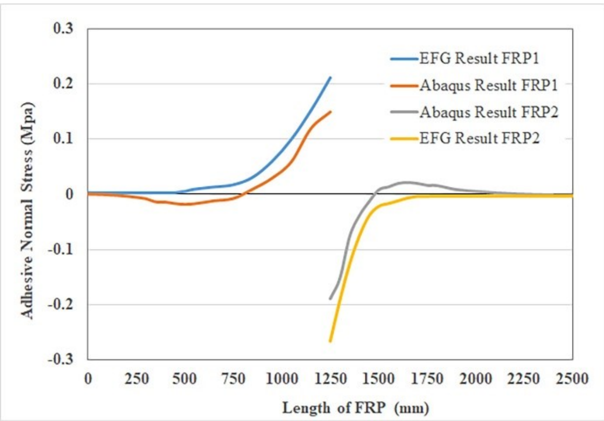
۸-۱- مقایسه نتایج روش بدون شبکه EFG با نتایج آباکوس

در این بخش نتایج حاصل از مدلسازی EFG در نرم افزار Matlab و همچنین مدل‌سازی FEM با نرم‌افزار Abaqus برای تیر نشان داده شده در شکل۱ بررسی می‌گردند. در مدل‌سازی EFG، نتایج مدل ارائه شده بر اساس فنرهای خطی معادل، با در نظرگرفتن خواص الاستیک چسب ارائه گردیده است. تنش‌های برشی و نرمال حاصل از مدل‌سازی، برای لایۀ چسب میان سطوح بتن و FRP، به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند. با توجه به تقارن مساله، نیمی از مساله مدل گردیده است و شرایط تکیه‌گاهی معادل در وسط تیر اعمال گردیده‌است. همانطور که از شکل ۶ مشاهده می‌شود، بیشترین تنش برشی در لبه ورق FRP رخ داده است (نقطه X=1250 هم در ورق بالا و هم در ورق پایین). این تمرکز تنش در لبۀ ورق همان تمایل به داشتن جدایی ورق از تیر است که باعث افزایش تغییر شکل نسبی چسب شده و باعث افزایش تنش برشی چسب شده است. در نقاط ابتدا و وسط تیر که جابجایی نسبی لایه چسب صفر است، مقدار تنش برشی برابر صفر می باشد. نتایج بدست آمده با روش EFG انطباق مناسبی با نتایج آباکوس دارد.



شکل۶- توزیع تنش برشی به دست آمده در لایه چسب

در شکل ۷ نتایج تنش نرمال در لایه چسب نشان داده شده است. مشابه تنش برشی، بیشترین تنشهای نرمال در لبه ورق FRP رخ می دهد. اما به دلیل کمتر بودن تغییرشکل قائم لایه چسب نسبت به تغییرشکل افقی، مقادیر تنش نرمال لایه چسب نسبت به تنش برشی کمتر است. مقادیر تنش نرمال در ابتدا و وسط تیر صفر است که دلیل آن صفر بودن تغییرشکل لایه چسب است. همانطور که در شکل ۷ دیده می شود نتایج به‌دست آمده از روش EFG انطباق خوبی با نتایج آباکوس دارد.



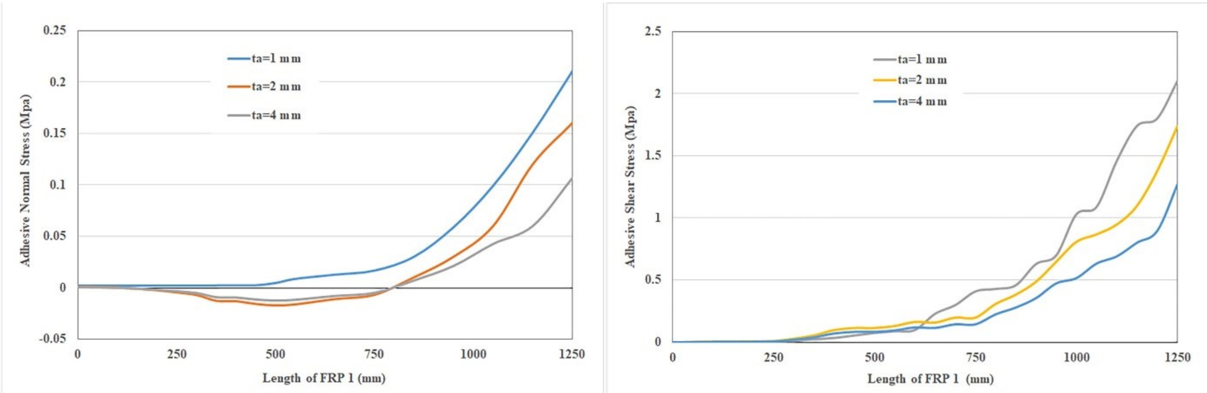
شکل۷- توزیع تنش نرمال به دست آمده در لایه چسب

در ادامه بر اساس مدل EFG یک مطالعه پارامتریک در مورد تأثیرات ضخامت لایه چسب و ضخامت ورق FRP در مقادیر تنش برشی و نرمال لایه چسب انجام شده است. این مقایسه بر اساس نتایج تنش برشی و نرمال در لایه چسب بین ورق FRP

بالایی و تیر بتنی است.

۸-۲- مطالعه پارامتریک

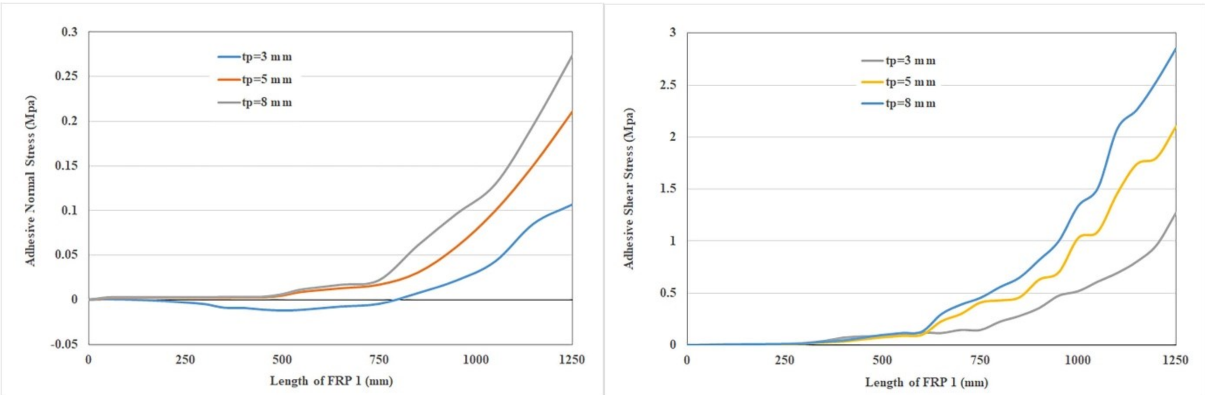
در این قسمت تأثیر ضخامت چسب در مقدار تنش برشی و نرمال چسب بررسی می شود. در شکل ۸-الف همانطور که دیده می شود مقدار تنش برشی ماکزیمم در لبه ورق با افزایش ضخامت چسب کاهش می‌یابد. افزایش ضخامت چسب در تنش برشی نزدیک تکیه‌گاه بی تأثیر است. در شکل ۸-ب هم همین رفتار برقرار است و با افزایش ضخامت چسب مقدار تنش حداکثر نرمال در لبه ورق کاهش می باشد.



الف ب

شکل۸- تأثیر ضخامتهای مختلف لایه چسب در الف)تنش برشی چسب ب) تنش نرمال چسب

در این بخش تأثیر افزایش ضخامت ورق FRP بررسی می شود. همانطور که از شکل ۹-الف دیده می‌شود، با افزایش ضخامت ورق FRP مقادیر تنش برشی حداکثر در لبه ورق افزایش می باشد. همین رفتار هم در شکل ۹-ب در تنش نرمال چسب دیده می‌شود و با افزایش ضخامت ورق FRP مقدار تنش نرمال افزایش می یابد.



الف ب

شکل۹- تأثیر ضخامت‌های مختلف ورق FRP در الف)تنش برشی چسب ب) تنش نرمال چسب

۹- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مدلی برای تحلیل الاستیک خطی تیر بتنی تقویت شده با ورق‌های FRP بر اساس روش عددی EFG ارائه گردید. در این مدل، رفتار لایۀ چسب میان سطوح با استفاده از خواص الاستیک آن به‌صورت فنرهایی خطی در نظر گرفته شد. هدف در این پژوهش تعیین تنش‌های برشی و عمودی در مرز بین ورق FRP و تیر بتنی با روش EFG می باشد و سپس نتایج این روش با خروجی آباکوس مقایسه شده است. نتایج این بررسی نشان می-دهد که مدل EFG انطباق بسیار مناسبی با نتایج آباکوس دارد. با توجه به پایدارتر بودن روش EFG، می‌توان از این روش عددی برای توسعۀ مدل‌های غیر خطیِ پدیدۀ جدایش ورق و تیر (از قبیل مدل‌های Cohesive Zone) و پیش بینی جدایش تدریجی

سطوح استفاده کرد. در ادامه تأثیرات افزایش ضخامت چسب و افزایش ضخامت ورق در تنشهای وارده بر چسب بررسی شد. با افزایش ضخامت چسب تنش برشی و نرمال در چسب کاهش یافت و با افزایش ضخامت ورق FRP تنش برشی و نرمال در چسب افزایش یافت.

۱۰- مراجع

[1] Etman EE, Beeby AW. Experimental programme and analytical study of bond stress distributions on a composite plate bonded to a reinforced concrete beam. Cement and Concrete Composites; vol. 22, no. 4, pp. 281-291, 2000/01/01/ 2000.

[2] Saadatmanesh H, Ehsani MR. RC Beams Strengthened with GFRP Plates. I: Experimental Study. Journal of Structural Engineering; vol. 117, no. 11, pp. 3417-3433, 1991.

[3] Garden HN, Quantrill RJ, Hollaway LC, Thorne AM, Parke GAR. An experimental study of the anchorage length of carbon fibre composite plates used to strengthen reinforced concrete beams. Construction and Building Materials, vol. 12, no. 4, pp. 203-219, 1998/06/01/ 1998.

[4] Bizindavyi L, Neale KW, Erki MA. Experimental Investigation of Bonded Fiber Reinforced Polymer-Concrete Joints under Cyclic Loading. Journal of Composites for Construction, vol. 7, no. 2, pp. 127-134, 2003.

[5] Aiello MA, Leone M. Interface analysis between FRP EBR system andconcrete. Composites Part B: Engineering, vol. 39, no. 4, pp. 618-626, 2008/06/01/ 2008.

[6] Chen JF, Teng JG. Anchorage Strength Models for FRP and Steel Plates Bonded to Concrete. Journal of Structural Engineering, vol. 127, no. 7, pp. 784-791, 2001.

[7] Mulian G, Rabinovitch O. Experimental and analytical study of the dynamic debonding in FRP plated beams. International Journal of Solids and Structures, vol. 92-93, pp. 121-134, 2016/08/15/ 2016.

[8] Rabinovich O, Frostig Y. Closed-Form High-Order Analysis of RC Beams Strengthened with FRP Strips. Journal of Composites for Construction, vol. 4, no. 2, pp. 65-74, 2000.

[9] Roberts T. Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beam. The Structural Engineer, vol. 67, no. 12, pp. 229-233, 1989.

[10] Vilnay O. The analysis of reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates. International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, vol. 10, no. 2, pp. 73-78, 1988/05/01/ 1988.

[11] Edalati M, Irani F. Interfacial stresses in RC beams strengthened by externally bonded FRP/steel plates with effects of shear deformations. Journal of Composites for Construction, vol. 16, no. 1, pp. 60-73, 2012.

[12] Malek AM, Saadatmanesh H, Ehsani MR. Prediction of failure load of R/C beams strengthened with FRP plate due to stress concentration at the plate end. ACI structural Journal, vol. 95, pp. 142-152, 1998.

[13] Shen HS, Teng J, Yang J. Interfacial Stresses in Beams and Slabs Bondedwith Thin Plate. Journal of engineering mechanics, vol. 127, no. 4, pp. 399-406, 2001.

[14] Rafi MM, Nadjai A, Ali F. Analytical modeling of concrete beams reinforced with carbon FRP bars. Journal of Composite Materials, vol. 41, no. 22, pp. 2675-2690, 2007.

[15] Smith ST, Teng JG. Interfacial stresses in plated beams. Engineering Structures, vol. 23, no. 7, pp. 857-871, 2001/07/01/ 2001.

[16] Deng J, Lee MMK, Moy SSJ. Stress analysis of steel beams reinforced with a bonded CFRP plate. Composite Structures, vol. 65, no. 2, pp. 205-215, 2004/08/01/ 2004.

[17] Stratford T, Cadei J. Elastic analysis of adhesion stresses for the design of a strengthening plate bonded to a beam. Construction and Building Materials, vol. 20, no. 1, pp. 34-45, 2006/02/01/ 2006.

[18] Abdelouahed T. Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate. International Journal of Solids and Structures, vol. 43, no. 14, pp. 4154-4174, 2006/07/01/ 2006.

[19] Tounsi A, Benyoucef S. Interfacial stresses in externally FRP-plated concrete beams. International Journal of Adhesion and Adhesives, vol. 27, no. 3, pp. 207-215, 2007.

[20] Benachour A, Benyoucef S, Tounsi A, Adda bedia EA. "Interfacial stress analysis of steel beams reinforced with bonded prestressed FRP plate," Engineering Structures, vol. 30, no. 11, pp. 3305-3315, 2008/11/01/ 2008.

[21] Rabahi A, Adim B, Chargui S, Daouadji TH. Interfacial Stresses in FRP-plated RC Beams: Effect of Adherend Shear Deformations. Cham, 2015, pp. 317-326: Springer International Publishing.

[22] Yang J, Ye J. An improved closed-form solution to interfacial stresses in plated beams using a two-stage approach. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 52, no. 1, pp. 13-30,

modeling of FRP shear-strengthened reinforced concrete beams. Journal of Composites for Construction, vol. 11, no. 6, pp. 640-649, 2007.
[36] Hoque MM. 3D nonlinear mixed finite-element analysis of RC beams andplates with and without FRP reinforcement. 2006.
[37] Ingraffea A, Saouma V. Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. in Fracture mechanics of concrete: structural application and numerical calculation: Springer, 1985, pp. 171-225.
[38] Wang J. Cohesive zone model of intermediate crack-induced debonding of FRP-plated concrete beam. International journal of solids and structures, vol. 43, no. 21, pp. 6630-6648, 2006.
[39] Benvenuti E, Orlando N. Intermediate flexural detachment in FRP-plated concrete beams through a 3D mechanism-based regularized eXtended Finite Element Method. Composites Part B: Engineering, vol. 145, pp. 281-293, 2018.
[40] Benvenuti E, Vitarelli O, Tralli A. Delamination of FRP-reinforced concrete by means of an extended finite element formulation. Composites Part B: Engineering, vol. 43, no. 8, pp. 3258-3269, 2012.
[41] Esna Ashari S, Mohammadi S. Fracture analysis of FRP-reinforced beams by orthotropic XFEM. Journal of composite materials, vol. 46, no. 11, pp. 1367-1389, 2012.
[42] Mohammadi T, Wan B, Harries K. Intermediate crack debonding model of FRP-strengthened concrete beams using XFEM. in SIMULIA Community Conf., Dassault Systèmes, Paris, 2013.
[43] Leung CK. Delamination failure in concrete beams retrofitted with a bonded plate. Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 13, no. 2, pp. 106-113, 2001.
[44] Bennegadi M, Hadjazi K, Sereir Z, Amziane S, El Mahi B. General cohesive zone model for prediction of interfacial stresses induced by intermediate flexural crack of FRP-plated RC beams. Engineering Structures, vol. 126, pp. 147-157, 2016.
[45] Hadjazi K, Sereir Z, Amziane S. Cohesive zone model for the predictionof interfacial shear stresses in a composite-plate RC beam with an intermediate flexural crack. Composite structures, vol. 94, no. 12, pp. 3574-3582, 2012.
[46] Lu XZ, Teng JG, Ye LP, Jiang JJ. Bond–slip models for FRP sheets/plates bonded to concrete. Engineering Structures, vol. 27, no. 6, pp. 920-937, 2005/05/01/ 2005.
[47] Biscaia HC, Chastre C, Silva MAG. Linear and nonlinear analysis of bond-slip models for

2010/01/01/ 2010.
[23] Faella C, Martinelli E, Nigro E. Formulation and validation of a theoretical model for intermediate debonding in FRP-strengthened RC beams. Composites Part B: Engineering, vol. 39, no. 4, pp. 645-655, 2008.
[24] Kaliakin VN, Chajes MJ, Januszka TF. Analysis of concrete beams reinforced with externally bonded woven composite fabrics. Composites Part B: Engineering, vol. 27, no. 3, pp. 235-244, 1996/01/01/ 1996.
[25] Kachlakev DI, Miller TH, Potisuk T, Yim SC, Chansawat K. Finite element modeling of reinforced concrete structures strengthened with FRP laminates. Oregon. Dept. of Transportation. Research Group2001.
[26] Hamoush SA, Ahmad S. Debonding of steel plate-strengthened concrete beams. Journal of Structural Engineering, vol. 116, no. 2, pp. 356-371, 1990.
[27] Lee K, Al-Mahaidi R, Taplin G. Non-Linear Finite Element Modelling of Shear-Damaged Concrete T-Beams Repaired with CFRP Laminates. in International Composites Conference (ACUN-2), 2ND, 2000, Sydney, New South Wales, Australia, 2000.
[28] Ngo D, Scordelis A. Finite element analysis of reinforced concrete beams. in Journal Proceedings, 1967, vol. 64, no. 3, pp. 152-163.
[29] Herrmann LR. Finite element analysis of contact problems. Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 104, no. 5, pp. 1043-1057, 1978.
[30] Wong RS, Vecchio FJ. Towards modeling of reinforced concrete members with externally bonded fiber-reinforced polymer composites. ACI Structural Journal, vol. 100, no. 1, pp. 47-55, 2003.
[31] Mohamed OA, Khattab R. Numerical Analysis of Reinforced Concrete Beam Strengthened with CFRP or GFRP Laminates. Key Engineering Materials, vol. 707, pp. 51-59, 2016.
[32] Zhang ZX, Ye LP, Lu XZ. Finite element analysis of shear behaviour of RC beams strengthened with U-shaped FRP sheets. Engineering Mechanics, vol. 4, p. 028, 2005.
[33] Elyasian I, Abdoli N, Rounaghi H. Evaluation of parameters effective in FRP shear strengthening of RC beams using FE method. 2006.
[34] Qu Z, Lu XZ, Ye LP, Chen JF, Rotter JM. Numerical modeling of FRP shear strengthened RC beams using compression field theory. in Proceedings, third international conference on FRP composites in civil engineering (CICE 2006), Miami, Florida, USA, 2006, pp. 391-394: Citeseer.
[35] Godat A, Neale KW, Labossière P. Numerical

interfaces between FRP composites and concrete. CompositesPart B: Engineering, vol. 45, no. 1, pp. 1554-1568, 2013/02/01/ 2013.
[48] Liu GR. Meshfree methods. moving beyond the finite element method. Taylor & Francis, 2009.
[49] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element- free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering, vol. 37, no. 2, pp. 229-256, 1994.
[50] Belytschko T, Krongauz Y, Fleming M, Organ D, Liu WKS. Smoothing and accelerated computations in the element free Galerkin method. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 74, no. 1-2, pp. 111-126, 1996.

Determining the shear and normal stress in boundary between concrete and FRP sheet by the Element Free Galerkin method and comparing its results with the finite element software ABAQUS

Mojtaba Haghgoo
PhD candidate, Department of civil engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.
Arash Bahar *
Assistant professor, Department of civil engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

Abstract
A model based on the Element Free Galerkin (EFG) method in the framework of linear elastic assumptions was developed to determine the distribution of interfacial stress in a concrete beam reinforced with FRP plates. In this model, the behavior of the adhesive layer between the surfaces is considered like a linear spring using its elastic properties, and MLS approximation functions are used to approximate the total displacement fields. In addition, the results were calculated and presented under the condition of complete adhesion between the surfaces. The results of the model were compared with the FEM model in Abaqus software for concrete beam and FRP panel. The results show that the EFG method has a good agreement with the outputs of the Abaqus model. To conclude this work, a parametric study was performed. It shows how the thickness of the adhesive layer and the FRP plate affect the shear and normal stress values of the adhesive.

Keywords: FRP sheet, adhesive layer, shear stress, normal stress.

* Corresponding Author: bahar@guilan.ac.ir