

## ارائه یک راهکار جدید جهت مدل سازی ترک در تیرهای بتن آرمه با استفاده از روش اجزای محدود

جواد رزاقی \*

استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

مرتضی خمایی ابدی

دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

علی علی جانی

استادیار گروه مهندسی مکانیک، واحد بندر انزلی، دانشگاه آزاد اسلامی، بندرانزلی، ایران

### چکیده

در این مقاله، ترک در مود اول (بازشدگی) برای تیرهای اویلر-برنولی بتن آرمه، با یک توسعه در روش اجزای محدود یک بعدی مدل سازی می شود. در این مدل، مشخصات ترک با استفاده از یک فنر پیچشی شبیه سازی می گردد. در روش پیشنهاد شده، اجزای تیر به دو دسته، شامل اجزای بدون ترک و دارای ترک تقسیم می شوند. در اجزای بدون ترک، از روابط، معادلات و ماتریس سختی متعارف حاکم بر تیر با در نظر گرفتن تغییرات ممان اینرسی ناشی از آرماتورها استفاده می گردد. در جزء محدود دارای ترک، یک تغییر در سطح مقطع بتن مسلح ناشی از وجود ترک و یک ناپیوستگی در نقطه‌ی ترک منجر به تغییر روابط حاکم استاندارد می شود. در این جزء، شبیه سازی ترک با استفاده از تقسیم جزء محدود دارای ترک به دو «ریز بخش» در دو طرف یک فنر پیچشی انجام می گردد. با استفاده از اعمال معادلات پیوستگی در نقطه‌ی ترک، ماتریس‌های سختی دو ریز بخش و سپس ماتریس سختی اصلاح شده‌ی جزء محدود دارای ترک استخراج می گردد. اثرات عمق و مکان ترک، محل قرارگیری و مساحت سطح مقطع آرماتورها بر روی رفتار استاتیکی تیر بتن آرمه بررسی می شود. مقایسه‌ی نتایج مدل پیشنهاد شده با نتایج حاصل از یک مدل سازی کامل در نرم افزار آباکوس، دقت بسیار خوب روش پیشنهادی را نشان می دهد.

واژه‌های کلیدی: اجزای محدود، ترک، بتن آرمه، تئوری اویلر-برنولی، ریز بخش، فنر پیچشی، نرم افزار آباکوس.

\* نویسنده مسئول: javadr@guilan.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از مهم ترین عوامل اصلی خسارات جبران ناپذیر در سازه های بتن آرمه، ایجاد و رشد ترک در اجزای آن به شمار می آید. به طوری که گزارش بسیاری از خرابی ها در سده اخیر، به موضوع ایجاد ترک های غیر قابل پیش بینی و کنترل در اجزای خمشی، برشی، کششی و فشاری این سازه ها اختصاص یافته است. از این رو ارائه یک مدل تحلیلی قابل اطمینان بر مبنای روش اجزای محدود که قابلیت بررسی رفتار سازه های بتن آرمه ی دارای ترک را داشته باشد، همواره مدنظر محققان بوده است؛ تا ضمن استخراج پارامترها و روابط تأثیرگذار روی ترک خوردگی، عوامل جلوگیری و کاهش آسیب در این سازه ها پیشنهاد شود. اهمیت و نقش ویژه این موضوع به دلیل پیچیدگی رفتار سازه های بتن آرمه ی دارای ترک در تحلیل های استاتیکی، دینامیکی، ارتعاشی، و خستگی، بیش از پیش حائز اهمیت به نظر می رسد.

فهرست علائم اختصاری

$a$	عمق ترک
$A$	مساحت سطح مقطع تیر
$A_s$	مساحت سطح مقطع میلگردها
$b$	ضخامت تیر
$C^L$	ماتریس اصلاح ریز بخش سمت چپ
$C^R$	ماتریس اصلاح ریز بخش سمت راست
$d$	فاصله محل آرماتورها تا بالاترین تار فشاری بتن
$D$	قطر آرماتورها
$E_c$	مدول الاستیسیته بتن
$E_s$	مدول الاستیسیته فولاد
$EI_0$	مدول خمشی مقطع کامل
$EI_c$	مدول خمشی مقطع ترک خورده
$f_c$	مقاومت فشاری بتن
$f_y$	تنش تسلیم فولاد
$f_u$	تنش نهایی فولاد
$h$	ارتفاع تیر
$I_0$	گشتاور دوم سطح مقطع کامل
$I_c$	گشتاور دوم سطح مقطع ترک خورده
$k_{L(R)}$	ماتریس سختی ریز بخش سمت چپ یا راست

$k_L^c$	ماتریس سختی اصلاح شده ریز بخش سمت چپ
$k_R^c$	ماتریس سختی اصلاح شده ریز بخش سمت راست
$k_s$	ضریب سختی فنر پیچشی
$K_0^{st}$	ماتریس سختی استاندارد
$K_{IM}$	ضریب شدت تنش تحت خمش خالص
$K_s$	ماتریس سختی اصلاح شده فنر پیچشی
$K_{cr}$	ماتریس سختی جزء محدود دارای ترک
$l_e$	طول جزء محدود دارای ترک
$L$	طول تیر
$M$	ممان خمشی
$N$	توابع شکل
$q$	بار گسترده
$u_{L(R)}$	بردار جابجایی بر حسب گره های ریز بخش چپ یا راست
$U$	انرژی کرنشی
$U_c$	انرژی کرنشی جزء محدود دارای ترک
$U_L$	انرژی کرنشی ریز بخش سمت چپ
$U_R$	انرژی کرنشی ریز بخش سمت راست
$U_s$	انرژی کرنشی فنر پیچشی
$V$	نیروی برشی
$w$	جابجایی عمودی گره
$x_0$	محل ترک در طول تیر
$x_c$	محل فنر پیچشی در جزء محدود دارای ترک
$\bar{y}_0$	محل تار خنثی مقطع کامل
$\bar{y}_c$	محل تار خنثی مقطع ترک خورده
$\gamma_{xz}$	کرنش برشی
$\gamma_c$	وزن مخصوص بتن
$\gamma_s$	وزن مخصوص فولاد
$\epsilon_x$	کرنش محوری
$\lambda_M$	نرمی فنر پیچشی
$\nu_c$	نسبت پواسون بتن
$\nu_s$	نسبت پواسون فولاد
$\xi$	نسبت طول ترک به ارتفاع تیر
$\sigma_x$	تنش محوری
$\phi$	شیب
$\Delta\phi$	تغییر زاویه دو طرف فنر پیچشی

## ۱-۱- روش‌های مدل‌سازی ترک

پرداختند تا اینکه سرانجام دیماروگوناس و پاپادپولوس [۱۲] توانستند رابطه‌ای بین سفتی فنر پیچشی و عمق ترک، ارائه کنند. سپس تحقیقات مشابهی برای توسعه این مدل ارائه شده است [۱۵-۱۳]. در راستای کاربردهای این روش، اوکامورا و همکارانش [۱۶] با استفاده از فنر پیچشی رفتار یک ستون دارای ترک با مقطع مستطیلی را بررسی کردند. دیماروگوناس و ریزوس [۱۷-۱۸] با استفاده از مدل فنر، تأثیر ترک و عمق آن را بر روی شکل مود و فرکانس‌های طبیعی تیر مورد مطالعه قرار دادند. یوکویاما و رایس [۱۹-۲۱] با استفاده از ضرایب شدت تنش، میزان سفتی فنر پیچشی را برای مدل‌سازی ترک در تیرهای با مقطع مستطیلی و T شکل و ستون‌ها، تعیین کردند.

## ۱-۳- مدل‌سازی ترک در سازه‌های بتن آرمه

یکی از اولین مطالعات در خصوص مدل‌سازی سازه‌های بتن آرمه با استفاده از روش اجزای محدود، در سال ۱۹۷۳ توسط کریشنامورتی [۲۲] و با ارائه یک برنامه رایانه‌ای برای بررسی رفتار یک قاب بتن آرمه انجام شده است. در ادامه زندک و همکاران [۲۳] با استفاده از روش‌های پیشین، یک مدل تحلیلی بر مبنای تعیین تنش‌های سازه، برای محاسبه میزان خیز تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک ارائه کردند. از آنجایی که رفتار غیرخطی این سازه‌ها نقش ویژه‌ای در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی دارد، هوسان و ویلیام [۲۴] یکی از اولین مطالعات را پیرامون تحلیل غیرخطی سازه‌های بتن آرمه‌ی دارای ترک در سال ۱۹۸۹ انجام دادند. یک مدل مناسب و کارا برای مدل‌سازی این تیرها، استفاده از مدل فنر پیچشی است. این روش حتی قابل تعمیم برای مدل‌سازی ترک در سازه‌های با بتن یابی و مقاوم شده با ورق‌های FRP می‌باشد، که توسط کراوچزوک [۲۵] در سال ۱۹۹۵ ارائه شده است. در این روش با تعیین ضرایب شدت تنش، میزان سفتی فنر پیچشی تعیین و اصلاح می‌شود. استفاده از ضرایب شدت تنش برای مدل‌سازی رفتار سازه‌های بتن آرمه‌ی دارای ترک به شدت موردنظر

تاکنون روش‌های متنوعی برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار ترک ارائه شده است [۱]. یکی از اولین روش‌های ارائه‌شده، مدل فنر خطی و پیچشی<sup>۱</sup> می‌باشد؛ که در سال ۱۹۵۴ توسط ایروین و کایس [۲] معرفی و در سال ۱۹۵۷ توسط ایروین [۳] تکمیل گردید. پس از مطالعات ایروین و همکاران، مدل ترک مجزای بین المانی<sup>۲</sup> توسط نگو و اسکوردیلز [۴] در سال ۱۹۶۷ ارائه شده است. در ادامه با ارائه مدل المان ترک مجزا<sup>۳</sup> در سال ۱۹۷۹ توسط کاندال و استراک [۵] بسیاری از نواقص مدل ترک مجزای بین المانی مرتفع گردید. یکی دیگر از روش‌های مدل‌سازی ترک، مدل ترک پخشی<sup>۴</sup> است؛ که توسط اون و هیئتون [۶] در سال ۱۹۸۰ ارائه شده است. علاوه بر آن، مدل المان‌های تکیه<sup>۵</sup> اون و فاوکز [۷] در سال ۱۹۸۳ نیز مدلی مناسب برای ترک محسوب می‌شود. یکی از ساده و کاراترین مدل‌ها برای مدل‌سازی ترک، مدل مقطع کاهش‌یافته<sup>۶</sup> است که برای اولین بار توسط کاینزلر و هرمان [۸] در سال ۱۹۸۵ ارائه شده است. مدل‌های محلی و غیر محلی ترک<sup>۷</sup> روشی دیگر برای شبیه‌سازی ترک به شمار می‌آید؛ که برای اولین بار در سال ۱۹۹۷ توسط بازانت [۹] ارائه شده است. با ارائه‌ی مدل المان‌های غنی‌شده<sup>۸</sup> در سال ۱۹۹۹ توسط موئس و همکاران [۱۰] اساسی نو در مدل‌سازی ترک ایجاد گردید. در ادامه با ارائه روش اجزای محدود توسعه‌یافته<sup>۹</sup> توسط بلتچکو و همکاران [۱۱] در همان سال، شبیه‌سازی ترک خوردگی بر پایه‌ی غنی‌سازی المان‌های ترک-خورده و المان حاوی نوک ترک انجام شده است. لازم به ذکر است، به دلیل پیچیدگی رفتار ترک در سازه‌های گوناگون با جنس مواد متفاوت، مبحث مدل‌سازی ترک خوردگی هنوز به‌عنوان یکی از موضوعات علمی رایج دنیا مورد مطالعه است.

## ۱-۲- مدل فنر پیچشی

استفاده از فنر پیچشی به‌منظور مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها، برای اولین بار توسط ایروین مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن بسیاری از محققان به بررسی رابطه بین عمق ترک و سفتی فنر پیچشی

<sup>۶</sup>. Reduced section

<sup>۷</sup>. Local and non-local models

<sup>۸</sup>. Enriched elements

<sup>۹</sup>. Extended finite element method-XFEM

<sup>۱</sup>. Line and Torsional Spring

<sup>۲</sup>. Discrete inter-element crack

<sup>۳</sup>. Discrete cracked element-DEM

<sup>۴</sup>. Smeared crack model

<sup>۵</sup>. Singular elements-SEM

مهندسی به خصوص مدل سازی ترک کمی سخت به نظر آید. از طرفی روش های مدل سازی نیز به شدت به تکنیک ها، فرضیات و روش های تحلیلی و عددی به کار رفته در تحلیل مسئله وابسته است. در نتیجه انتخاب مناسب ترین تئوری و روش برای مدل سازی ترک در سازه های بتن آرمه ضروری به نظر می رسد.

## ۲-۱- مروری بر تئوری تیر اویلر برنولی

معادلات پایه در تیرهای اویلر برنولی با صرف نظر کردن از اثرات نیروی برشی و اینرسی دورانی به صورت روابط (۱-۱) و (۲-۱) قابل تعریف می باشد.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (1-1)$$

$$\rightarrow \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2-1)$$

بر طبق رابطه (۱-۱) معادلات ساختاری برای یک تیر اویلر-برنولی الاستیک به صورت رابطه (۲) تعریف می شود.

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \rightarrow \sigma_x = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2)$$

در اینجا روابط بین خیز، شیب دوران، نیروی برشی و ممان خمشی در حالت تعادل ارائه می شود.

$$\phi(x) = \frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1-3)$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} \quad (2-3)$$

$$M(x) = \int -z \sigma_x dA = \int Ez^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA \quad (3-3)$$

$$M = EI_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = EI_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

در تئوری اویلر-برنولی از جزء محدودهای یک بعدی برای تحلیل اجزای محدود تیرها استفاده می شود. ماتریس سختی تیر بدون ترک خوردگی با استفاده از معادله انرژی پتانسیل مطابق رابطه (۴) به صورت رابطه (۶) تعیین می گردد.

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon_x^T \sigma_x dV \quad (4)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^T \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx, \quad w = [N]u$$

که در آن توابع شکل هرمیتی<sup>۱</sup> مطابق رابطه (۵) تعریف می شود.

پژوهشگران قرار گرفت به طوری که مطالعات در این حوزه تاکنون ادامه داشته و تحقیقات گسترده ای پیرامون این موضوع انجام شده است [۲۶-۳۲]. با پیشرفت علم، بسیاری از روش های عددی مبتنی بر برنامه نویسی رایانه ای برای مدل سازی ترک در سازه های بتن آرمه و در زمینه ی تحلیل رفتار این سازه ها گسترش یافته است [۳۳-۳۶].

در این مطالعه، راهکار جدیدی برای تحلیل رفتار استاتیکی تیرهای بتن آرمه ی دارای ترک، پیشنهاد شده است. در این روش، مدل سازی ترک با استفاده از مفاهیم مکانیک شکست (تعیین ضرایب شدت تنش) و قوانین انرژی، بر مبنای ارتقا روش اجزای محدود انجام شده است. شبیه سازی ترک در این روش، با استفاده از تعریف دو ریز بخش در دو طرف یک فتر پیچشی صورت می گیرد. در نتیجه با باز نویسی معادلات پیوستگی در محل ترک، ریز بخش ها و فتر پیچشی به کمک روابط ریاضی ارائه شده، به یکدیگر مرتبط می گردد. در این روش تأثیر ترک خوردگی به صورت تغییر سطح مقطع تیر و به تبع آن اصلاح میزان سفتی فتر در محل ترک لحاظ شده است. به طوری که میزان سفتی فتر پیچشی با توجه به تغییر عمق و محل ترک خوردگی در هر مرحله بهبود پیدا می کند. در روش حاضر، تأثیر آرماتورها، به صورت اصلاح ممان اینرسی مقطع تیر و همچنین با اصلاح میزان سفتی فتر پیچشی با توجه به محل قرارگیری و مساحت سطح مقطع میلگردها، در نظر گرفته می شود. در نهایت تأثیرات سفتی ناشی از ترک و آرماتورها، مجموعاً روی ماتریس سختی نهایی سازه اعمال و خیز تیر اصلاح می گردد. این روش می تواند در تحلیل های ارتعاشی، کمانشی و یا دینامیکی برای اعضای بتن آرمه دارای ترک های متعدد قابل توسعه باشد.

## ۲-۲- مروری بر فرضیات و روش های تحلیل

از جمله روش های بررسی رفتار سازه های بتن مسلح، انجام آزمایش عملی و شبیه سازی رایانه ای به وسیله تکنیک های عددی می باشد. اگرچه نتایج روش اول ملموس تر و عینی تر است، اما محدودیت هایی چون شکل سازه ای، اندازه، بارگذاری و شرایط مرزی سبب می شود، امکان آزمایش عملی برای تمام مسائل

<sup>۱</sup>. Hermitian Shape Functions

باشد. از آنجایی که سازه‌های بتن آرمه جز مواد کامپوزیت به شمار می‌آیند، در نتیجه روش حاضر برای تحلیل این سازه‌ها مناسب به نظر می‌رسد. روابط ارائه شده توسط کاینز لر [۸] برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش، توسط یوکویاما [۱۹-۲۰] و رایس [۲۱] به صورت زیر توسعه پیدا کرد.

$$K_{IM} = M \sqrt{\frac{1}{bI_0} \left( \frac{I_0}{I_c} - 1 \right)} \quad (1-8)$$

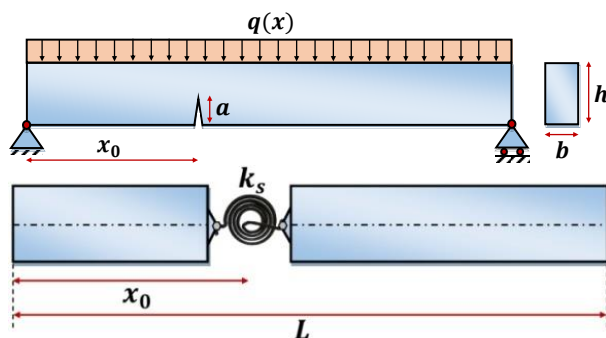
$$K_{IM} = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a F_M(\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq 0.6, \quad \xi = \frac{a}{h}$$

$$F_M(\xi) \quad (2-8)$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{\pi\xi}\right) \tan \frac{\pi\xi}{2} 0.923 + 0.199[1 - \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)]}{\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}}$$

$$K_I = \frac{3.99M}{bh\sqrt{h}\sqrt{(1-\xi)^3}}, \quad 0.6 < \xi < 1 \quad (3-8)$$

با جایگزین کردن ترک، توسط یک فنر پیچشی مطابق شکل (۲)، سختی تیر در محل ترک با میزان سفتی فنر نشان داده می‌شود. واضح است هرچقدر عمق ترک افزایش یابد میزان سفتی فنر کاهش و در نتیجه خیز تیر افزایش می‌یابد.



شکل ۲- مدل فنر پیچشی تیر دارای ترک

با جای گذاری ضرایب شدت تنش استخراج شده از روابط (۷) و (۸)، در رابطه ارائه شده [۲۱]، ضریب سفتی فنر پیچشی مطابق رابطه (۹) تعیین می‌گردد.

$$\lambda_M = \frac{1}{k_s} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left( \frac{K_I}{M} \right)^2 da \quad (9)$$

### ۳- راهکار پیشنهادی جهت فرمول بندی تیر بتن آرمه با استفاده از روش اجزای محدود

در این روش، برای مدل سازی ترک، ابتدا تیر بتن آرمه توسط جزء- محدودهای یک بعدی گسسته سازی می‌شود. جزء محدودهای

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$N_1 = \frac{1}{l_e^3} (2x^3 - 3x^2l_e + l_e^3)$$

$$N_2 = \frac{1}{l_e^3} (x^3l_e - 2x^2l_e^2 + xl_e^3) \quad (5)$$

$$N_3 = \frac{1}{l_e^3} (-2x^3 + 3x^2l_e)$$

$$N_4 = \frac{1}{l_e^3} (x^3l_e - x^2l_e^2)$$

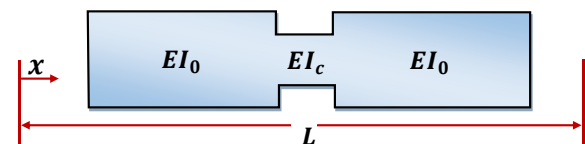
با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۴) ماتریس سختی یک جزء- محدود تیر به دست می‌آید که قابل تعمیم برای سایر اجزا می‌باشد.

$$K_0 = EI_0 \int_0^{l_e} [N'']^T [N''] dx \quad (1-6)$$

$$K_0 = \frac{EI_0}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

### ۲-۲- مروری بر روش مدل سازی ترک

استفاده از ضرایب شدت تنش و فنر پیچشی، یک روش دقیق و کارا برای تحلیل ترک می‌باشد. به طور کلی این روش بر اساس تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات گشتاور دوم سطح، قبل و بعد از ایجاد ترک پایه ریزی می‌شود. در این روش ابتدا مشخصات هندسی ترک از طریق کاهش سطح مقطع تیر مطابق شکل (۱) شبیه سازی می‌شود. سپس نرخ انرژی آزاد شده، ناشی از تغییرات انرژی کرنشی در مقطع کامل و ترک خورده محاسبه می‌گردد.



شکل ۱- کاهش مقطع تیر دارای ترک با تغییرات ممان اینرسی

در این روش، انرژی آزاد شده بر اساس رابطه‌ی پیشنهاد شده توسط اروین [۳] به مقادیر ضرایب شدت تنش مرتبط می‌شود. این ضریب برای تیری با مقطع مستطیلی تحت خمش خالص از رابطه (۷) به دست می‌آید.

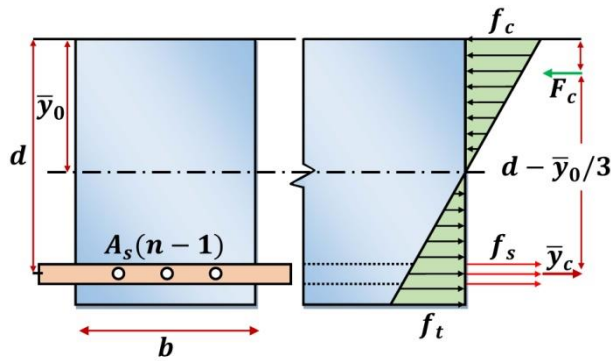
$$K_{IM} = M(x) \sqrt{\frac{1}{b} \left( \frac{1}{I_c} - \frac{1}{I_0} \right)} \quad (7)$$

این مدل با ایجاد یک پیوند عمیق بین اصول مکانیک شکست، و روش اجزای محدود، می‌تواند پاسخگوی رفتار استاتیکی، ارتعاشی، کماتشی و دینامیکی سازه‌های کامپوزیت دارای ترک

می باشد. با مشخص بودن مقاومت فشاری بتن، بر طبق آیین نامه بتن ایران، مدول الاستیسیته بتن بر طبق رابطه (۱۰-۱) تعیین می شود.

$$E_c = (3300\sqrt{f_c} + 6900)(\gamma_c/23)^{3/2} \quad (1-10)$$

$$n = E_s/E_c \quad (2-10)$$



شکل ۴- مقطع تبدیل یافته استاندارد تیر بتن آرمه

محل تار خنثی و ممان اینرسی اصلاح شده در تیر بتن آرمه بدون ترک مطابق رابطه (۱۱-۱) تعیین می گردد:

$$\bar{y}_0 = \frac{bh\left(\frac{h}{2}\right) + (A_s(n-1)d)}{bh + A_s(n-1)} \quad (1-11)$$

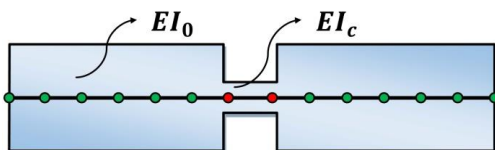
$$I_0 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2} - \bar{y}_0\right)^2 + A_s(n-1)(d - \bar{y}_0)^2 \quad (2-11)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱-۲) در رابطه (۱۱-۲) ماتریس سختی اجزای بدون ترک تیر بتن آرمه مطابق رابطه (۱۲) ارائه می شود.

$$K_0^{st} = \frac{EI_0}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

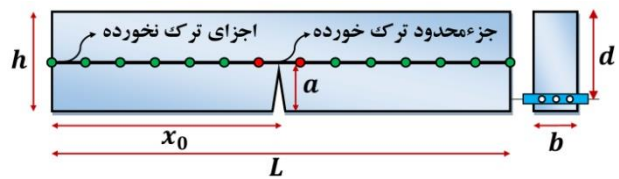
### ۲-۳- فرمول بندی روش اجزای محدود برای جزء محدود ترک خورده

پیاده سازی روش اجزای محدود برای جزء محدود ترک خورده (غنی شده) بر طبق روش مقطع کاهش یافته مطابق شکل (۵) انجام می شود.



شکل ۵- کاهش مقطع تیر بتن آرمه دارای ترک

گسسته مطابق شکل (۳) به دو دسته تقسیم می شوند. دسته اول، اجزای بدون ترک هستند که با جزء محدودهای معادل شده با بتن آرمه، شبیه سازی می شوند. این اجزا با استفاده از روش مقطع تبدیل یافته، به صورت یکپارچه با مدول الاستیسیته بتن و با افزایش سطح مقطع در محل آرماتورها در نظر گرفته می شود. دسته دوم، جزء محدود دارای ترک است که خود به دو ریز بخش در دو طرف یک فنر پیچشی تقسیم می شود. به واسطه حضور ترک در این جزء محدود، سطح مقطع تیر در محل ترک به اندازه عمق ترک کاهش پیدا می کند.



شکل ۳- جزء محدودهای ترک خورده و ترک نخورده در تیر بتن آرمه

در فرمول بندی ارائه شده، با استفاده از اعمال معادلات پیوستگی در معادلات حاکم بر تیرها، ریز بخش ها و فنر پیچشی به کمک روابط ریاضی به یکدیگر مرتبط می شوند و ماتریس های سختی اصلاح شده ی دو ریز بخش و فنر پیچشی استخراج می گردد.

### ۱-۳- فرمول بندی روش اجزای محدود برای اجزای بدون ترک

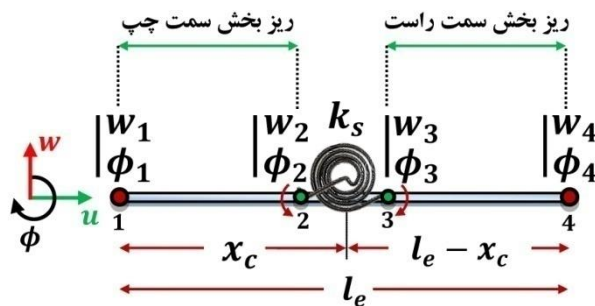
روش اجزای محدود برای اجزای بدون ترک مطابق آنچه در تئوری تیرها مورد بررسی قرار گرفت، پیاده سازی می شود. به طوری که با گسسته سازی تیر بتن آرمه، به مجموعه ی جزء محدود های یک بعدی، مطابق شکل (۳) و با فرض توابع شکل هرمیتی به صورت رابطه (۵)، نهایتاً ماتریس سختی نهایی سازه مطابق رابطه (۶-۱) تعیین می شود. آنچه در اینجا حائز اهمیت است، تغییرات ممان اینرسی ناشی از آرماتورهای مسلح کننده در سازه می باشد. که اثرات آن باید در رابطه (۶-۲) لحاظ شود. بدین منظور از ایده مقطع تبدیل یافته مطابق با شکل (۴) استفاده می شود. در این روش مقطع تیر بتن آرمه با یک ناحیه فشاری در بالای تار خنثی، یک ناحیه کششی در پایین تار خنثی و  $n - 1$  برابر سطح مقطع فولاد معادل می گردد. در اینجا  $n$ ، نسبت ضریب الاستیسیته فولاد به بتن

$$\Delta\phi = \lambda M, \quad \lambda = 1/k_s, \quad M = EI_0 \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$w_2'(x_0) + \psi(w_2''(x_0)) = w_3'(0), \quad \psi = \frac{EI_0}{k_s}$$

$$w_2''(x_0) = w_3''(0) \quad (3-14)$$

$$w_2'''(x_0) = w_3'''(0) \quad (4-14)$$



شکل ۸- جزء محدود دارای ترک

برای محاسبه‌ی سختی جزء محدود دارای ترک، علاوه بر تعیین یک ماتریس سختی برای هر ریز بخش، لازم است که میزان سفتی فنر پیشگی برحسب عمق ترک مشخص شود. در نتیجه ماتریس سختی جزء محدود ترک خورده به صورت مجموع سه ماتریس سختی تعریف می‌شود. که برای محاسبه‌ی هر کدام از آن‌ها از قوانین انرژی استفاده می‌گردد. میزان انرژی کرنشی کل جزء محدود دارای ترک به صورت مجموع انرژی‌های کرنشی ریز بخش‌های سمت چپ و راست و انرژی کرنشی فنر پیشگی به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود.

$$U_c = U_L + U_R + U_s \quad (15)$$

انرژی کرنشی ریز بخش سمت چپ فنر پیشگی مطابق روابط (۱۶)- (۱) و (۲-۱۶) تعیین می‌شود.

$$U_L = \frac{1}{2} \int \varepsilon_x^T \sigma_x dV \quad (1-16)$$

$$U_L = \frac{1}{2} \int_0^{x_c} EI_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^T \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (2-16)$$

با استفاده از رابطه (۴) میزان خیز ریز بخش‌ها به صورت رابطه (۱۷) ارائه می‌گردد.

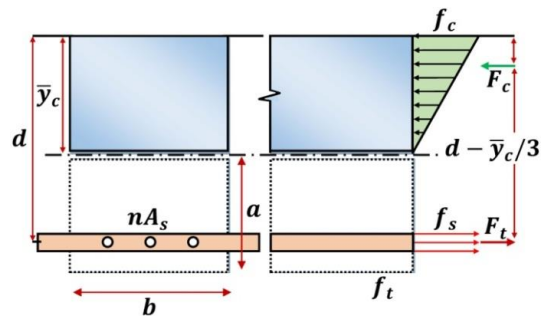
$$w = N_1^L w_2 + N_2^L \phi_2 + N_3^L w_3 + N_4^L \phi_2 \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در (۲-۱۶) میزان انرژی کرنشی ریز بخش چپ بر طبق رابطه (۱۸) ارائه می‌شود.

$$U_L = \frac{1}{2} \{u_L\}^T [k_L] \{u_L\} \quad (18)$$

که در آن بردار جابجایی ناشی از خیز و دوران به صورت رابطه (۱۹) قابل تعریف می‌باشد.

با کاهش سطح مقطع تیر، محل تار خنثی و ممان اینرسی مقطع بتن-آرمه به صورت شکل (۶) تغییر می‌کند.



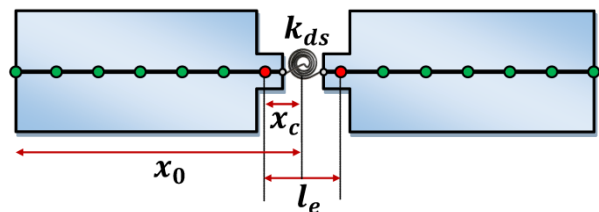
شکل ۶- مقطع تبدیل یافته ترک خورده

در نتیجه با بازنویسی روابط (۱-۱۱) و (۲-۱۱)، محل تار خنثی و ممان اینرسی مقطع بتن آرمه ترک خورده به صورت روابط (۱-۱۳) و (۲-۱۳) تعیین می‌گردد.

$$\bar{y}_c = \frac{2nA_s(d - \bar{y}_c)}{b\bar{y}_c} = \frac{b(h-a) + \frac{(h-a)}{2}}{b(h-a)} \quad (1-13)$$

$$I_c = \frac{b\bar{y}_c^3}{3} + nA_s(d - \bar{y}_c)^2 = \frac{b(h-a)^3}{12} \quad (2-13)$$

در روش ارائه شده برای مدل سازی ترک خوردگی، جزء محدود دارای ترک مطابق شکل (۷) با دو ریز بخش و یک فنر پیشگی معادل سازی می‌شود.



شکل ۷- مدل فنر پیشگی در تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک

برای ایجاد یک ارتباط منطقی بین ریز بخش‌ها و فنر پیشگی از شرایط پیوستگی حاکم در محل ترک استفاده می‌شود. مطابق شکل (۸)، درحالی که میزان خیز، گشتاور خمشی و نیروی برشی در دو طرف فنر پیشگی با یکدیگر برابرند، شیب ناشی از دوران گره‌های ۲ و ۳ برابر نیستند. به طوری که میزان تغییرات phi\_2 به phi\_3 میزان بازشدگی ترک را نشان می‌دهد.

معادلات پیوستگی در محل ترک با تأثیر فنر پیشگی، به صورت روابط (۱-۱۴) الی (۴-۱۴) اصلاح و ارائه می‌شود.

$$w_2(x_0) = w_3(0) \quad (1-14)$$

$$\phi_2 + \Delta\phi = \phi_3 \quad (2-14)$$

$$C_L^{33} = \frac{1}{X}(3l_e^2x_c^2 - 2l_ex_c^3 + 4x_c^3\psi) \quad (5-25) \quad \{u_L\}^T = \{w_1\phi_1 w_2\phi_2\} \quad (19)$$

$$C_L^{34} = \frac{1}{X}(-l_e^3x_c^2 + l_e^2x_c^3 - 4l_ex_c^3\psi + 4x_c^4\psi) \quad (6-25)$$

نهایتاً ماتریس سختی ریز بخش سمت چپ مطابق رابطه (۲۰) ارائه می شود.

$$C_L^{41} = \frac{1}{X}(-6l_e^2x_c + 6l_ex_c^2 - 6x_c^2\psi) \quad (7-25)$$

$$k_L = \frac{EI_c}{x_c^3} \begin{bmatrix} 12 & 6x_c & -12 & 6x_c \\ 6x_c & 4x_c^2 & -6x_c & 2x_c^2 \\ -12 & -6x_c & 12 & -6x_c \\ 6x_c & 2x_c^2 & -6x_c & 4x_c^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$C_L^{42} = \frac{1}{X}(l_e^4 - 4l_e^3x_c + 4l_e^2\psi + 3l_e^2x_c^2 - 12l_e^2x_c\psi + 12l_ex_c^2\psi - 6x_c^3\psi) \quad (8-25)$$

به طور مشابه برای تعیین انرژي کرنشی و ماتریس سختی ریز بخش سمت راست روابط (۲۱) الی (۲۳) ارائه می شود.

$$C_L^{43} = \frac{1}{X}(6l_e^2x_c - 6l_ex_c^2 + 6x_c^2\psi) \quad (9-25)$$

$$U_R = \frac{1}{2}\{u_R\}^T [k_R] \{u_R\} \quad (21)$$

$$\{u_R\}^T = \{w_3\phi_3 w_4\phi_4\} \quad (22)$$

$$C_L^{44} = \frac{1}{X}(-2l_e^3x_c + 3l_e^2x_c^2 - 6l_ex_c^2\psi + 6x_c^3\psi) \quad (10)$$

به طور مشابه، برای تبدیل بردار جابجایی بر حسب ریز بخش سمت راست به بردار جابجایی بر حسب جزء محدود پایه روابط (۱-۲۶) و (۲-۲۶) ارائه می گردد.

$$u_R = C_R u \quad (1-26)$$

$$C_R = \begin{bmatrix} C_R^{11} & C_R^{12} & C_R^{13} & C_R^{14} \\ C_R^{21} & C_R^{22} & C_R^{23} & C_R^{24} \\ C_R^{31} & C_R^{32} & C_R^{33} & C_R^{34} \\ C_R^{41} & C_R^{42} & C_R^{43} & C_R^{44} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

که در آن هر یک از درایه های ماتریس تبدیل  $C_R$  به صورت روابط (۱-۲۷) الی (۱۰-۲۷) محاسبه می شود.

$$C_R^{33} = C_R^{44} = 1 \quad (1-27)$$

$$C_R^{31} = C_R^{32} = C_R^{34} = C_R^{41} = C_R^{42} = C_R^{43} = 0 \quad (2-27)$$

$$C_R^{11} = \frac{1}{X}(l_e^4 + 4l_e^3\psi - 3l_e^2x_c^2 - 12l_e^2x_c\psi + 2l_ex_c^3 + 12l_ex_c^2\psi - 4x_c^3\psi) \quad (3-27)$$

$$C_R^{12} = \frac{1}{X}(l_e^4x_c - 2l_e^3x_c^2 + 4l_e^3x_c\psi + l_e^2x_c^3 - 12l_e^2x_c^2\psi + 12l_ex_c^3\psi - 4x_c^4\psi) \quad (4-27)$$

$$C_R^{13} = \frac{1}{X}(3l_e^2x_c^2 - 2l_ex_c^3 + 4x_c^3\psi) \quad (5-27)$$

$$C_R^{14} = \frac{1}{X}(-l_e^3x_c^2 + l_e^2x_c^3 - 4l_ex_c^3\psi + 4x_c^4\psi) \quad (6-27)$$

$$C_R^{21} = \frac{1}{X}(-6l_e^2x_c - 6l_e^2\psi + 6l_ex_c^2 + 12l_ex_c\psi - 6x_c^2\psi) \quad (7-27)$$

$$C_R^{22} = \frac{1}{X}(l_e^4 - 4l_e^3x_c + 3l_e^2x_c^2 - 6l_e^2x_c\psi + 12l_ex_c^2\psi - 6x_c^3\psi) \quad (8-27)$$

انرژی های کرنشی فوق بر حسب جابجایی نقاط گره ای ریز بخش ها می باشد. بنابراین ضروری است به منظور قابلیت اسمبل کردن ماتریس های سختی، این انرژی های کرنشی بر حسب جابجایی های نقاط گره ای پایه (گره های ۱ و ۴) محاسبه شوند. این امر با استفاده از ماتریس های تبدیل استخراج شده از حل دستگاه معادلات پیوستگی، انجام می شود. برای تبدیل بردار جابجایی بر حسب ریز بخش سمت چپ به بردار جابجایی بر حسب جزء محدود پایه، روابط (۱-۲۴) و (۲-۲۴) ارائه می گردد.

$$u_L = C_L u \quad (1-24)$$

$$C_L = \begin{bmatrix} C_L^{11} & C_L^{12} & C_L^{13} & C_L^{14} \\ C_L^{21} & C_L^{22} & C_L^{23} & C_L^{24} \\ C_L^{31} & C_L^{32} & C_L^{33} & C_L^{34} \\ C_L^{41} & C_L^{42} & C_L^{43} & C_L^{44} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

هر یک از درایه های ماتریس تبدیل  $C_L$  با حل دستگاه معادلات پیوستگی، مطابق روابط (۱-۲۵) الی (۱۰-۲۵) محاسبه می شود.

$$C_L^{11} = C_L^{22} = 1 \quad (1-25)$$

$$C_L^{12} = C_L^{13} = C_L^{14} = C_L^{21} = C_L^{23} = C_L^{24} = 0 \quad (2-25)$$

$$C_L^{31} = \frac{1}{X}(l_e^4 + 4l_e^3\psi - 3l_e^2x_c^2 - 12l_e^2x_c\psi + 2l_ex_c^3 + 12l_ex_c^2\psi - 4x_c^3\psi) \quad (3-25)$$

$$C_L^{32} = \frac{1}{X}(l_e^4x_c - 2l_e^3x_c^2 + 4l_e^3x_c\psi + l_e^2x_c^3 - 12l_e^2x_c^2\psi + 12l_ex_c^3\psi - 4x_c^4\psi) \quad (4-25)$$



سختی جزء محدود دارای ترک به صورت رابطه (۳۵) محاسبه و ارائه می گردد.

$$K_{cr} = k_L^c + k_R^c + K_s \quad (35)$$

در ادامه ماتریس سختی اجزای استاندارد بتن آرمه ی با ماتریس سختی جزء محدود ترک خورده ترکیب و ماتریس سختی نهایی سازه تشکیل می شود.

#### ۴- بحث و نتایج

در این بخش برای بررسی دقت و صحت مدل پیشنهاد شده، رفتار تیر بتن-آرمه ی دارای ترک در قالب یک مثال کاربردی مورد آزمون قرار می گیرد. به طوری که تغییرات عمق و مکان ترک روی میزان خیز تیر الاستیک بتن-آرمه بررسی و مقادیر آن با نرم افزار آباکوس صحت سنجی می شود.

#### ۴-۱- فرضیات مقطع ترک خورده تیر بتن آرمه

- ۱- بتن و میلگرد هر دو از قانون هوک پیروی می کنند. (تنش متناسب با کرنش است)
- ۲- چسبندگی کافی بین میلگرد و بتن وجود دارد، به طوری که از حرکت نسبی بین آن دو جلوگیری می کند.
- ۳- مقاطع صفحه ای عمود بر محور تیر، پس از خمش نیز به صورت صفحه باقی می ماند. به عبارت دیگر، تغییرات کرنش در ارتفاع تیر به صورت خطی است.
- ۴- نتیجه دو فرض فوق به این صورت می باشد که تغییرات تنش در ارتفاع مقطع به صورت خطی است، به عبارت دیگر تنش به نسبت فاصله از تار خشی، افزایش پیدا می کند.
- ۵- سایر فرضیات مربوط به تغییر شکل و خمش اعضای همگن در این مورد نیز صادق است.
- ۶- اصول مکانیک شکست خطی برای محاسبه ی ضرایب شدت تنش با صرف نظر کردن از شرایط پلاستیسیته نوک ترک، در نظر گرفته می شود.
- ۷- مشخصات ترک در راستای ضخامت تیر ثابت فرض می شود و از رشد ترک صرف نظر می شود.

#### ۴-۲- مشخصات مدل

تیر بتن آرمه دارای ترک با مشخصات هندسی و مادی مفروض مطابق با جدول (۱)، تحت شرایط مرزی دو سر ساده، دوسرگیردار

$$C_R^{23} = \frac{1}{X} (6l_e^2 x_c + 6l_e^2 \psi - 6l_e x_c^2 - 12l_e x_c \psi + 6x_c^2 \psi) \quad (9-27)$$

$$C_R^{24} = \frac{1}{X} (-2l_e^3 x_c - 2l_e^3 \psi + 3l_e^2 x_c^2 + 6l_e^2 x_c \psi - 6l_e x_c^2 \psi + 6x_c^3 \psi) \quad (10-27)$$

که در آن ها پارامتر  $X$  به صورت رابطه (۲۸) تعریف می شود.

$$X = l_e (l_e^3 + 4l_e^2 \psi - 12l_e x_c \psi + 12x_c^2 \psi) \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (۱-۲۴) و (۱-۲۶) در روابط محاسبه ی انرژی کرنشی ریز بخش ها (روابط (۱۸) و (۲۱))، انرژی کرنشی ریز بخش سمت چپ و راست بر حسب گره های جزء محدود پایه به ترتیب به صورت رابطه (۱-۲۹) و (۲-۲۹) محاسبه می شود.

$$U_L = \frac{1}{2} \{u\}^T [C_L]^T [k_L] [C_L] \{u\} \quad (1-29)$$

$$U_R = \frac{1}{2} \{u\}^T [C_R]^T [k_R] [C_R] \{u\} \quad (2-29)$$

در اینجا به منظور محاسبه ی انرژی کرنشی فنر پیچشی، رابطه (۳۰) بر حسب میزان دوران در دو طرف فنر پیچشی توسعه داده می شود.

$$U_s = \frac{1}{2} k_s \Delta \phi^2 = \frac{1}{2} k_s (\phi_3 - \phi_2)^T (\phi_3 - \phi_2) \quad (30)$$

بدین ترتیب، میزان دوران گره های دو طرف فنر پیچشی (گره های ۳ و ۲) با استفاده از ماتریس تبدیل ارائه شده مطابق روابط (۱-۲۴) و (۱-۲۶) به دوران نقاط گره ای جزء محدود پایه تبدیل می شوند.

$$\phi_2 = \{C_L^{41} \quad C_L^{42} \quad C_L^{43} \quad C_L^{44}\} u \quad (1-31)$$

$$\phi_3 = \{C_R^{21} \quad C_R^{22} \quad C_R^{23} \quad C_R^{24}\} u \quad (2-31)$$

با جایگذاری روابط (۱-۳۱) و (۲-۳۱) در رابطه (۳۰)، انرژی کرنشی فنر پیچشی مطابق رابطه (۳۲) ارائه می گردد.

$$U_s = \frac{1}{2} \{u\}^T k_s \{C_M\}^T \{C_M\} \{u\} \quad (32)$$

که در آن:

$$\{C_M\} = \begin{Bmatrix} C_R^{21} - C_L^{41} & C_R^{22} - C_L^{42} & C_R^{23} - C_L^{43} & C_R^{24} - C_L^{44} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

با بررسی روابط (۱-۲۹)، (۲-۲۹) و (۳۲) ماتریس سختی اصلاح شده ی ریز بخش ها و فنر پیچشی به ترتیب برابر است با:

$$k_L^c = [C_L]^T [k_L] [C_L] \quad (1-34)$$

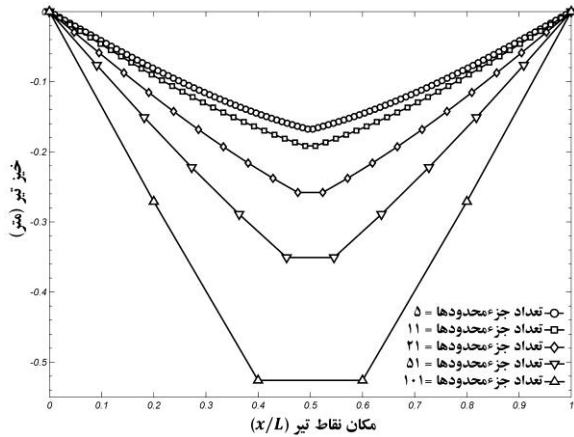
$$k_R^c = [C_R]^T [k_R] [C_R] \quad (2-34)$$

$$K_s = k_s \{C_M\}^T \{C_M\} \quad (3-34)$$

با مشخص بودن ضریب سفتی فنر پیچشی ( $k_s$ ) از رابطه (۹) و با جایگذاری روابط (۱-۲۹)، (۲-۲۹) و (۳۲) در رابطه (۱۵) ماتریس

### ۴-۳- بررسی همگرایی مدل

در اینجا با افزایش تعداد جزء محدودها، میزان همگرایی مدل پیشنهاد شده مطابق شکل (۹) برای شرایط مرزی دو سر ساده بررسی می شود که قابل تعمیم برای سایر شرایط مرزی می باشد.



شکل ۹- تأثیر افزایش تعداد جزء محدودها روی میزان همگرایی

### خیز

با توجه به شکل (۹) مشاهده می شود که میزان اختلاف ناشی از مدل سازی در ۵۱ جزء محدود نسبت به ۱۰۱ جزء محدود کمتر از ۴ درصد می باشد؛ بنابراین با توجه به همگرایی مناسب نتایج، از ۵۱ جزء محدود در ادامه تحلیل استفاده شده است. از آنجا که طول تیر ۳ متر فرض شده است، طول هر جزء محدود  $\frac{3}{51}$  متر خواهد بود.

### ۴-۴- مدل سازی در نرم افزار آباکوس

در اینجا مدل سازی تیر بتن آرمه ی دارای ترک به صورت خطی در محیط نرم افزار آباکوس و با روش اجزای محدود توسعه یافته انجام می شود. در این روش ترک به صورت یک خط مرزی بر روی تیر معرفی می گردد و ویژگی هایی نظیر عمق و جهت به ترک اختصاص داده می شود. چگالی انرژی کرنشی بحرانی، ماکزیم تنش اصلی و جابجایی شکست برای سازه تعریف می گردد هر چند در این تحلیل از رشد ترک چشم پوشی می شود.

### ۴-۵- صحت سنجی

#### ۴-۵-۱- بررسی تغییرات عمق ترک

برای بررسی دقت و کارایی مدل پیشنهاد شده، یک تیر بتن آرمه تحت شرایط مرزی و هندسی ذکر شده، در نظر گرفته می شود. به طوری که ابتدا با ثابت فرض کردن محل ترک در میانه ی تیر ( $x_0/L = 0.5$ ) تغییرات خیز ناشی از افزایش عمق ترک از صفر

و یکسر گیردار مورد بررسی قرار می گیرد. ترک در تار کششی تیر و به صورت ثابت در راستای ضخامت فرض می شود. تغییرات عمق ترک از صفر تا 0.6 ارتفاع و تغییرات محل ترک در ناحیه ی بین 0.05 - 0.95 طول تیر بررسی می گردد.

جدول ۱- ویژگی های تیر بتن آرمه ی دارای ترک

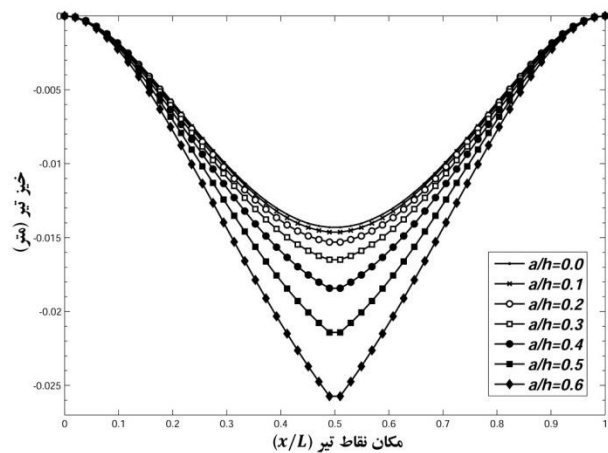
مشخصات مادی	مشخصات هندسی
$E_c = 2.5e10 \text{ N/m}^2$	$L = 3m$
$E_s = 2.0e11 \text{ N/m}^2$	$h = 0.3m$
$\nu_c = 0.25$	$d = 0.27m$
$\nu_s = 0.3$	$D = 3\phi 22 \text{ m}$
$\gamma_c = 2400 \text{ N/m}^3$	$A_s = \pi D^2/4 \text{ m}^2$
$\gamma_s = 7850 \text{ N/m}^3$	$a/h = 0.0 - 0.6$
$f_c = 25 \text{ MPa}$	$x_0/L = 0.05 - 0.95$
$f_y = 240 \text{ MPa}$	$q = w \times L = 4e6 \text{ N/m}$
$f_u = 400 \text{ MPa}$	

نتایج حاصل از تأثیر عمق ترک، روی میزان سفتی فنر پیچشی و ممان اینرسی مقطع ترک خورده مطابق جدول (۲) ارائه می شود.

جدول ۲- تغییرات سفتی فنر پیچشی، ممان اینرسی مقطع ترک خورده و  $\psi$  با تغییرات عمق ترک

$\frac{a}{h}$	ضریب نرمی فنر $\lambda_M$	ضریب سفتی فنر $k_s$	$I_c \text{ (m}^4\text{)}$	$\psi = \frac{EI_0}{k_s}$
0	0	-	0.0022	0
0.1	2.26e-10	4.43e+09	0.0016	0.0092
0.2	9.29E-10	1.08E+09	0.00115	0.0268
0.3	2.40E-09	4.16E+08	0.00077	0.0464
0.4	5.20E-09	1.92E+08	0.00048	0.0632
0.5	1.05E-08	9.54E+07	0.00028	0.0737
0.6	2.10E-08	4.76E+07	0.00014	0.0757

همان طور که مشاهده می شود، با افزایش عمق ترک میزان نرمی فنر پیچشی افزوده می شود؛ در نتیجه به طور معکوس، میزان سفتی فنر و ممان اینرسی جزء محدود ترک خورده کاهش پیدا می کند. در حالی که میزان ممان اینرسی اجزای ترک نخورده بتن آرمه همواره ثابت و برابر با  $0.002362 \text{ m}^4$  می باشد.



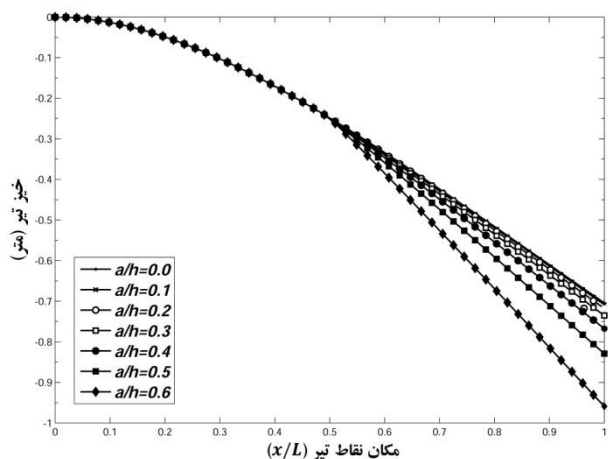
شکل ۱۱- تأثیر عمق ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه (C-C)

جدول ۴- تحلیل استاتیکی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در میانه،

تحت شرایط مرزی C-C با تغییرات عمق ترک

$\frac{a}{h}$	خیز تیر (روش حاضر) (متر)	خیز تیر (آباکوس) (متر)	خطا (درصد)
0	-0.0143	-0.0147	3.22
0.1	-0.0146	-0.0150	3.05
0.2	-0.0153	-0.0160	5.12
0.3	-0.0164	-0.0173	5.26
0.4	-0.0184	-0.0189	2.89
0.5	-0.0214	-0.0207	3.17
0.6	-0.0257	-0.0223	12.98

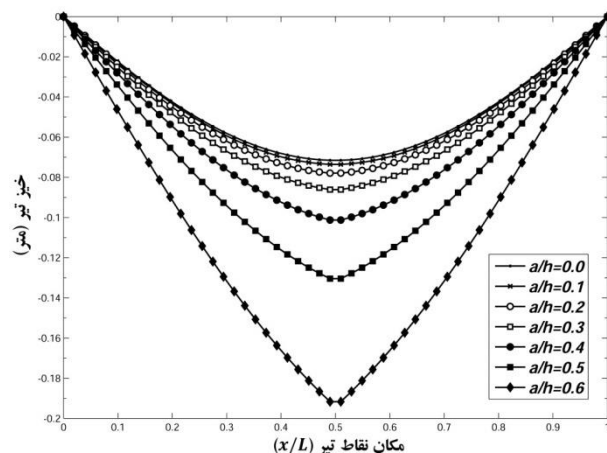
تأثیر عمق ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه تحت شرایط مرزی C-F، مطابق شکل (۱۲) ارائه می گردد.



شکل ۱۲- تأثیر عمق ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه (C-F)

مطابق دو شرایط مرزی پیشین برای اطمینان از دقت مدل، جدول (۵) ارائه می شود.

تا ارتفاع 0.6، مطابق شکل (۱۰) برای تیر بتن آرمه تحت شرایط مرزی SS-SS بررسی می گردد.



شکل ۱۰- تأثیر عمق ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه (SS-SS)

برای اطمینان از دقت مدل ارائه شده، نتایج به دست آمده، با نتایج حاصل از شبیه سازی در نرم افزار آباکوس مطابق جدول (۳) مقایسه و صحت سنجی می شود.

جدول ۳- تحلیل استاتیکی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در میانه،

تحت شرایط مرزی SS-SS با تغییرات عمق ترک

$\frac{a}{h}$	خیز تیر (روش حاضر) (متر)	خیز تیر (آباکوس) (متر)	خطا (درصد)
0	-0.0715	-0.0714	0.12
0.1	-0.0735	-0.0732	0.52
0.2	-0.0779	-0.0797	2.37
0.3	-0.0861	-0.0895	3.97
0.4	-0.1013	-0.1045	3.15
0.5	-0.1304	-0.1265	3.01
0.6	-0.1916	-0.1884	7.06

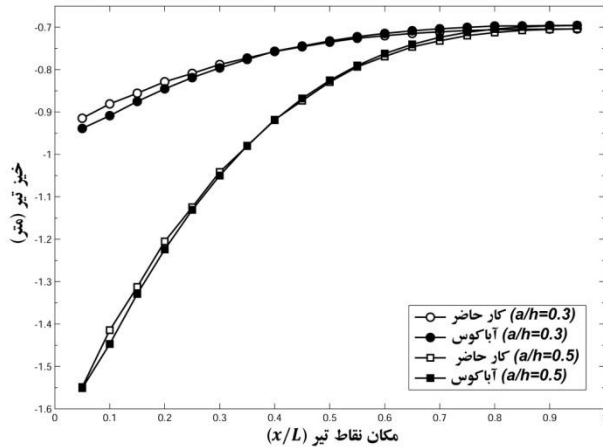
نتایج حاصل از جدول (۳) نشان می دهد که تا عمق 0.5، ارتفاع تیر، خطای مدل سازی در حدود ۴ درصد می باشد. رشد خطا در عمق های بیشتر از 0.5 ناشی از رفتار غیرخطی بتن و فولاد می باشد. تأثیر عمق ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه تحت شرایط مرزی C-C، به صورت شکل (۱۱) ارائه می شود.

مطابق شرایط مرزی پیشین، برای اطمینان از دقت مدل پیشنهاد شده، خطاهای ناشی از مدل سازی با دو روش، مقایسه می شود و نتایج آن به صورت جدول (۴) ارائه می گردد.

جدول ۵- تحلیل استاتیکی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در میانه،

تحت شرایط مرزی C-F با تغییرات عمق ترک

خطا (درصد)	خیز تیر (آباکوس) (متر)	خیز تیر (روش حاضر) (متر)	$\frac{a}{h}$
1.21	-0.6958	-0.7042	0
1.41	-0.6987	-0.7085	0.1
0.85	-0.7117	-0.7177	0.2
0.39	-0.7323	-0.7351	0.3
0.10	-0.7666	-0.7673	0.4
0.47	-0.8253	-0.8291	0.5
2.61	-0.9347	-0.9591	0.6



شکل ۱۵- تأثیر محل ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه (C-F)

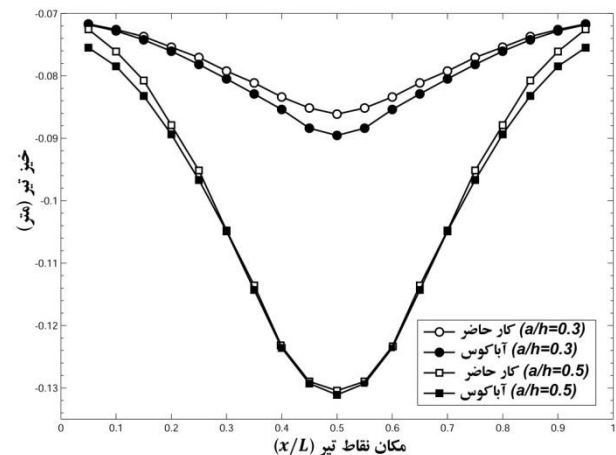
مقایسه و بررسی شکل‌های (۱۳-۱۵) دقت و انعطاف‌پذیری مناسب روش ارائه‌شده را نشان می‌دهد، به طوری که در شرایط مرزی SS-SS و C-F منحنی‌های مربوط به نتایج مدل‌سازی اجزای محدود و آباکوس کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند (بیشینه خطای ۳٫۹ درصد)، در حالت C-C دلیل خطا ۵٫۲۶ درصد، در نظر نگرفتن اثرات نیروی برشی در فرضیات تئوری تیر اویلر-برنولی به نظر می‌رسد، که قابل چشم‌پوشی است و با افزایش طول تیر این خطا کاهش پیدا می‌کند.

### ۵- نتیجه‌گیری

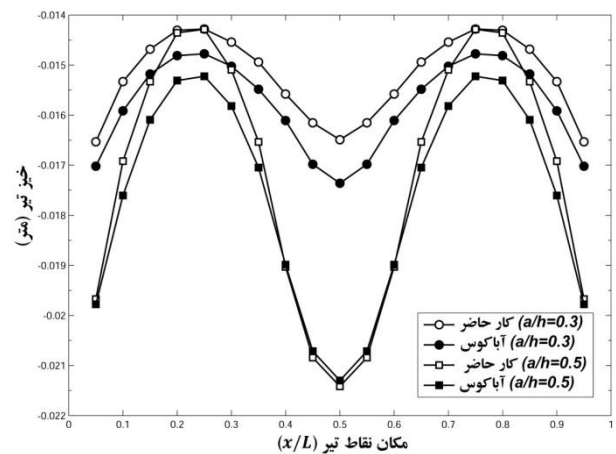
در این مقاله رفتار استاتیکی-ارتجاعی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک تحلیل و بررسی شده است. تحلیل انجام‌شده بر مبنای ارتقا روش اجزای محدود و با استفاده از تقسیم اجزای تیر به دو دسته، صورت گرفته است. دسته‌ی اول، اجزای بدون ترک استاندارد هستند که بر مبنای اصلاح ممان اینرسی ناشی از حضور میلگردها و با روش مقطع تبدیل یافته، اصلاح می‌شوند. دسته‌ی دیگر جزء محدود دارای ترک است که خود به سه بخش تقسیم‌بندی می‌شود. بخش اول، ریز بخش سمت چپ فنر پیچشی، بخش دوم، فنر پیچشی و بخش سوم، ریز بخش سمت راست فنر پیچشی می‌باشد. با استفاده از روابط ارائه‌شده، ماتریس‌های سختی اجزای استاندارد و دارای ترک، اصلاح می‌شود و سختی نهایی سازه دارای ترک، تعیین می‌گردد. در مطالعه‌ی حاضر تأثیرات عمق و مکان ترک روی میزان خیز تیر مورد بررسی قرار گرفت و نتایج آن صحت سنجی شده است. مقایسه و بررسی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد:

### ۴-۵-۲- بررسی تغییرات محل ترک

در این بررسی، دقت مدل پیشنهادشده، با بررسی خیز بیشینه در حالتیکه عمق ترک  $(a/h = 0.3, 0.5)$  ثابت فرض شده است و تغییر محل ترک بین  $0.05 - 0.95$  طول تیر اتفاق می‌افتد، مطابق شکل (۱۳-۱۵) بررسی می‌شود.



شکل ۱۳- تأثیر محل ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه (SS-SS)



شکل ۱۴- تأثیر محل ترک روی میزان خیز تیر بتن آرمه (C-C)

- [7] Owen, D.R.J., Fawkes, A.J. (1983). "Eng fracture mechanics: numerical methods and applications". Pineridge Press, United Kingdom.
- [8] Kienzler, R., Herrmann, G. (1986). "An elementary theory of defective beams". Journal of Acta Mechanica, Vol. 62, pp. 37-46.
- [9] Bažant, Z.P., Planas, J. (1998). "Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials". CRC Press Publishing, United States of America.
- [10] Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999). "A finite element method for crack growth without remeshing". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, pp. 131-150.
- [11] Belytschko, T., Black, T. (1999). "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, pp. 601-620.
- [12] Dimarogonas, A.D., Papadopoulos, C.A. (1983), "Vibration of cracked shafts in bending". Journal of Sound and Vibration, Vol. 91, pp. 583-593.
- [13] Ostachowicz, W.M., Krawczuk, M. (1990), "Vibrational analysis of cracked beam". Composite Structures, Vol. 36-22, pp. 245-250.
- [14] Krawczuk, M., Ostachowicz, W.M. (1993), "Influence of a crack on the dynamic stability of a column". Journal of Sound and Vibration. Vol. 167, pp. 541-555.
- [15] Skrinar, M. Pliberšek, T. (2004), "New linear spring stiffness definition for displacement analysis of cracked beam elements". Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 4, pp. 654-655.
- [16] Okamura, H., et al. (1969), "A cracked column under compression". Engineering Fracture Mechanics, Vol. 1, pp. 547-564.
- [17] Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. (1980), "Identification of cracks in welded joints of complex structures". Journal of Sound and Vibration, Vol. 4, No. 64, pp. 531-538.
- [18] Rizos, P.F., et al. (1990), "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes". Journal of Sound and Vibration, Vol. 3, pp. 381-388.
- [19] Yokoyama, T. (1996), "Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations", Journal of Computers & Structures, Vol. 61, pp. 995-1007.
- [20] Yokoyama, T., Chen, M.C. (1998), "Vibration analysis of edge-cracked beams using a linespring model", Journal of Engineering Fracture Mechanics, Vol. 59, pp. 403-409.
- [21] Ricci, P., Viola, E. (2006), "Stress intensity factors for cracked T-sections and dynamic behavior of T-beams", Journal of Engineering Fracture Mechanics, Vol. 73, pp. 91-111.

الف) تحت تمامی شرایط مرزی، همواره با افزایش عمق ترک، میزان خیز تیر افزایش پیدا می‌کند. روند افزایشی حاضر به صورت تابعی صعودی از عمق ترک قابل بیان می‌باشد.

ب) با تغییرات محل ترک از ابتدا تا میانه‌ی تیر، تحت شرایط مرزی دوسر ساده، خیز همواره افزایش پیدا می‌کند. درحالی‌که این رفتار در شرایط مرزی دوسرگیردار ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌باشد. همچنین شرایط مرزی یکسر گیردار موجب می‌شود با تغییرات محل ترک از ابتدای تیر تا میانه، همواره میزان خیز کاهش پیدا کند.

ج) تحت بار و شرایط هندسی کاملاً یکسان مطابق با مفروضات، بیشترین میزان خیز تیر، در شرایط مرزی یکسر گیردار و کمترین آن تحت شرایط مرزی دوسرگیردار اتفاق افتاده است.

د) تغییرات خیز ناشی از عمق ترک در محدوده‌ی کمتر از ۰٫۱ ارتفاع تیر، به دلیل عدم تأثیرگذاری، در نظر گرفته نشده است. همچنین به دلیل رفتارهای غیرخطی بتن در محدوده‌ی بیشتر از ۰٫۶ ارتفاع تیر، تغییرات خیز ناشی از عمق ترک نیز در این ناحیه در نظر گرفته نمی‌شود.

ه) مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با تغییرات محل و عمق ترک نشان داد که راهکار جدید پیشنهاد شده برای مدل‌سازی ترک در تیرهای بتن آرمه با استفاده از روش اجزای محدود، با دقت مناسب قابل قبول می‌باشد.

## ۶- مراجع

- [1] Mohamadi, S. (2008). "Extended finite element method for fracture analysis of structures". Blackwell Publishing, United States of America.
- [2] Irwin, G.R., Kies, J.A. (1954). "Critical energy rate analysis of fracture strength". Journal of Welding, Vol. 33, pp. 193-198.
- [3] Irwin, G.R. (1957). "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate". Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 361-364.
- [4] Ngo, D., Scordelis, A.C. (1967). "Finite element analysis of reinforced concrete beams". Journal of American Concrete Institute, Vol. 64, pp. 152-163.
- [5] Cundall, P.A., Strack, O.D.L. (1979). "A discrete numerical model for granular assemblies". Journal of Geotechnique, Vol. 29 (1), pp. 47-65.
- [6] Owen, D.R.J., Hinton, E. (1980). "Finite element plasticity, theory and practice". Pineridge Press, United Kingdom.

Engineering, Technology & Applied Science Research, Vol. 3, pp. 429–432.

[35] Subramani, T., Manivannan, R., Kavitha, M. (2014), “Crack Identification in Reinforced Concrete Beams Using Ansys Software”, Journal of Engineering Research and Applications, Vol. 4, pp. 133–141.

[36] Slowik, M., Smarzewski, P. (2014), “Numerical Modeling Of Diagonal Cracks In Concrete Beams”, Journal of Archives Of Civil Engineering, Vol. 3, pp. 307–322.

[22] Krishnamoorthy, C., Panneerselvam, S. A. (1978), “FEP-ACSI-a finite element program for nonlinear analysis of reinforced concrete framed structures”, Journal of Computer and Structures, Vol. 9, pp. 451–461.

[23] Zdenek, P.B., Byung, H. (1984), “Deformation of Progressively Cracking Reinforced Concrete Beams”, Journal of ACI, Vol. 71, pp. 268–278.

[24] Hu, H., William, C. (1990), “Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete”, Journal of ACI, Vol. 87, pp. 199–207.

[25] Krawczuk, M., Ostachowicz, W. M. (1995), “modelling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 183, pp. 69–89.

[26] Husnu, M., Alaattin, A. (2000), “Analytical and finite element comparisons of stress intensity factors of composite materials”, Journal of Composite Structures, Vol. 50, pp. 99–102.

[27] Lau, K., Shi, S. (2001), “Estimation of stress intensity factor (KI) for an FRP bonded concrete beam using the superposition method”, Journal of Concrete Research, Vol. 53, pp. 31–41.

[28] Yang, Q. G., Chen, Q. (2004), “Analysis of the stress intensity factor of vertical cracks in small-size beams bonded with GFRP”, Journal of Damage and Fracture Mechanics, Vol. 55, pp. 67–79.

[29] Wang, K., Inman, D., Farrar, C. (2005), “Modeling and analysis of a cracked composite cantilever beam vibrating in coupled bending and torsion”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 284, pp. 23–49.

[30] Ju, S. H., Liu, S. H. (2007), “Determining stress intensity factors of composites using crack opening displacement”, Journal of Composite Structures, Vol. 81, pp. 614–621.

[31] Mogadpalli, G. P., Parameswaran, V. (2008), “Determination of stress intensity factor for cracks in orthotropic composite materials using digital image correlation”, Journal of compilation, Vol. 44, pp. 446–452.

[32] Dotti, F., Cortnez, V., Reguera, F. (2013), “Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled composite beams”, Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 68, pp. 38–45.

[33] Rogoza, A., Ubysz, A. (2009), “Numerical analysis of the crack reinforced concrete beams”, 18th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineerings, Germany, 07-09 July.

[34] Benarbia, D., Benguediab, M., Benguediab, S. (2013), “Two-dimensional Analysis of Cracks Propagation in Structures of Concrete”, Journal of

## **A new approach for modeling of crack in reinforced concrete beams using finite element method**

**J. Razzaghi \***

Assistant Professor, Department of civil engineering, University of Guilan

**M. Kh. Abadi**

Masters Student, Department of civil engineering, University of Guilan

**A. Alijani**

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran

### **Abstract**

In this paper, the crack in the opening mode I is modeled for reinforced concrete Euler-Bernoulli beams by a development in the one-dimensional finite element method. In this model, characteristics of the crack are simulated by use of a rotational spring. In the proposed model, elements of the beam are divided into two categories, including elements with and without the crack. In the elements without the crack, the standard governing relationships of the beam are established with considering the moment of inertia of the reinforced cross section. In the elements with the crack, a change in the cross-section of the reinforced concrete due to the crack and a discontinuity in the crack point lead to an improvement in the standard governing relationships. In this case, the simulation of the crack is done by dividing the element to two sub-elements into the two sides of the rotational spring. The stiffness matrices of the two sub-elements and the improved stiffness matrix of the element are derived by satisfying the continuity equation at the crack point. The effects of the depth and position of the crack and the location and the cross-section area of reinforcing bars on the static behavior of the reinforced concrete beam are investigated. Comparing the results of the proposed model with the results of comprehensive modeling in Abacus software is applied to verify.

**Keywords:** Finite Element Method, Reinforced Concrete, Euler-Bernoulli Beam Theory, Sub-Element, Rotational Spring, Abaqus Software.

---

\* Corresponding Author: javadr@guilan.ac.ir

