

## رفتار بعد از ترک دال مجوف بتن مسلح در خمش

مآنده معینی \*

دانشجوی دکترا عمران - سازه، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

جواد رزاقی لنگرودی

استادیار، گروه عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران.

### چکیده

دال‌های مجوف بتنی به علت مزایای زیادی که از لحاظ عملکردی و اقتصادی دارند، امروزه به یکی از سیستم‌های پرکاربرد در سقف ساختمان‌ها و عرشه پل‌ها تبدیل شده‌اند. با وجود تحقیقات و مطالعات عددی و آزمایشگاهی جامعی که بر روی دال‌های مجوف و عملکرد آنها صورت گرفته است، اطلاعات اندکی درباره رفتار بعد از ترک این نوع دال‌ها و خصوصاً ویژگی سخت‌شدگی کششی در آنها وجود دارد. رفتار بعد از ترک عمدتاً در دال‌ها و تیرهای توپر مورد مطالعه قرار گرفته است و در این میان دال‌های مجوف کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این تحقیق ۹ رابطه معروف تنش-کرنش کششی بتن که اثر سخت‌شدگی کششی نیز در آنها لحاظ شده، مورد مطالعه قرار گرفته و کارایی آنها در پیش‌بینی رفتار دال‌های مجوف بتنی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور یک برنامه کامپیوتری بر مبنای مدل لایه‌ای برای تحلیل دال‌ها و تیرهای سوراخ‌دار ارائه شده است. در نهایت با به‌کارگیری روابط تنش-کرنش کششی مذکور برای بتن در برنامه کامپیوتری و مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی بهترین رابطه کششی بتن برای پیش‌بینی رفتار دال‌های مجوف بتن مسلح بعد از ترک معرفی و پیشنهاد میگردد.

واژه‌های کلیدی: دال مجوف، رفتار بعد از ترک، خمش، سخت‌شدگی کششی، مطالعات عددی.

### فهرست علائم

$A_c$	مساحت مؤثر بتن دور میلگرد که در کشش مشارکت می کند	$\beta$	ضریبی که مقاومت کششی میانگین در مساحت مؤثر بتن دور میلگرد را مشخص میکند
$A_s$	مساحت میلگردها	$\epsilon_c$	کرنش فشاری واقعی بتن
$E_c$	مدول الاستیسیته بتن	$\epsilon_{cr}$	کرنش ترک خوردگی بتن وقتی $\epsilon_s = \epsilon_{sp}$
$E_s$	مدول الاستیسیته فولاد	$\epsilon_s$	کرنش محاسباتی فولاد در مدل کاملاً ترک خورده (از سخت شدگی کششی صرف نظر شده است)
$f'_c$	مقاومت فشاری بتن	$\epsilon_{sm}$	کرنش میانگین فولاد با در نظر گرفتن سخت شدگی کششی
$f_t$	مقاومت کششی غیر مستقیم بتن	$\epsilon_{sp}$	کرنش محاسباتی فولاد وقتی سخت شدگی کششی حداکثر است
$f''_c$	مقاومت فشاری بتن در خمش	$\epsilon_t$	کرنش کششی واقعی بتن
$f_{cc}$	تنش فشاری بتن	$\epsilon_u$	کرنش فشاری نهایی بتن
$f_{ct}$	تنش کششی بتن	$\epsilon_0$	کرنش فشاری بتن در لحظه تنش ماکزیمم
$F_t$	نیروی سخت شدگی کششی در بتن		
$\beta_t, \alpha_1, \alpha_2$	ضرایب تجربی		

### ۱- مقدمه

اتصال‌های میلگردها بین نواحی سالم بتن ایجاد کرده اند، هنوز کشش را تحمل میکنند. این پدیده به عنوان سخت شدگی کششی<sup>۶</sup> شناخته میشود و تاثیر بسیار زیادی در رفتار بعد از ترک سازه های بتن مسلح دارد. بنابراین تحلیل یک المان بتن مسلح بدون توجه به اثر سخت شدگی کششی در آن نتایج دقیق به دست نخواهد داد. در مورد دال‌های مجوف، از آنجایی که رفتار این دال‌ها تحت تاثیر هندسه و سوراخهای موجود در آنها قرار میگیرد، اثر سخت شدگی کششی در آنها متفاوت از این اثر در دال‌ها و تیرهای توپر است [۲۳-۱۴]. در اکثر روش‌های اجزاء محدود مبتنی بر محیط‌های پیوسته، اثر سخت شدگی کششی در رابطه تنش-کرنش کششی مصالح بتن لحاظ شده است [۳۵-۲۴]. این مدل‌ها که به‌طور وسیعی در تحلیل‌ها به کار گرفته می‌شوند، اثر سخت شدگی کششی را با یک رابطه که معرف بخش نزولی منحنی تنش-کرنش کششی بتن است، ارائه می‌کنند.

دال‌های مجوف یکی از محبوب‌ترین سیستم‌های سازه‌ای در سیستم‌های سقف و عرشه‌ها هستند و به دو صورت مسلح معمولی و پیش تنیده‌استفاده می‌شوند. در این نوع از دال‌ها معمولاً جهت کاهش وزن سازه، یک حفره دایروی در جهت طولی در دال ایجاد میشود [۱ و ۲]. روشهای زیادی برای تحلیل این نوع از دال‌ها توسط محققین مختلف معرفی شده است. در این میان نظریه پوسته اورتوتروپیک<sup>۱</sup> [۳ و ۴]، روش پوسته ساندویچی<sup>۲</sup> [۵ و ۶]، روش قاب و شبکه<sup>۳</sup> [۷-۹] و روش نوآرهای محدود<sup>۴</sup> [۱۰] از معروف‌ترین این روش‌ها هستند. روش اجزاء محدود<sup>۵</sup> یک روش قدرتمند برای تحلیل انواع سازه‌ها بوده و همچنین یک روش مؤثر برای تحلیل دال‌های سلولی و سوراخ‌دار نیز هست [۱۱-۱۳]. با وجود تحقیقات انجام شده روی این نوع از دال‌ها، مطالعات مکفی در زمینه رفتار خمشی این نوع دال در مرحله بعد از ترک صورت نگرفته و رفتار بعد از ترک دال‌های مجوف مورد توجه و بررسی جامعی قرار نگرفته است.

در این مطالعه، برای پیش بینی رفتار خمشی دال‌های مجوف یک روش ساده بر مبنای روش لایه‌ای ارائه شده است. انتخاب معادله ساختاری مناسب برای بتن کششی به خصوص در مرحله پساترک از مهم‌ترین عواملی است که بر پیش‌بینی رفتار خمشی بعد از ترک

در یک المان ترک خورده از دال بتن مسلح، بتن سالم مابین ترک‌ها هنوز توانایی تحمل کشش را دارد. بنابراین این المان به واسطه

<sup>4</sup> Finite strip method

<sup>5</sup> Finite element method

<sup>6</sup> Tension Stiffening

<sup>1</sup> Orthotropic plate theory

<sup>2</sup> Sandwich plate method

<sup>3</sup> Frame and grillage method

منحنی‌های لنگر- انحنای آزمایشگاهی تحقیقات موجود بر روی تیرهای بتنی و با استفاده از روش لایه‌ای استخراج شد. در سال ۲۰۰۵ بی بی و همکارانش مدل کششی ارائه شده در دفترچه فنی ICE [۳۹] را مورد مطالعه قرار داده و اصلاح کردند [۲۵]. آنها در نهایت یک رابطه کششی جدید برای بتن تحت بارگذاری‌های بلند مدت و کوتاه مدت ارائه کردند. یک رابطه برای سخت شدگی کششی در سال ۲۰۰۸ توسط استراماندینولی و روره پیشنهاد شد که با روابط موجود دیگر مقایسه و همچنین با نتایج آزمایشگاهی صحت سنجی گردید [۳۳]. این مدل برای اعضای تحت تک محوری ارائه شده بود اما استفاده از آن برای اعضای تحت خمش و با استفاده از مفاهیم مساحت کششی مؤثر نیز پیشنهاد شد. در سال ۲۰۱۰ کاکلائوسکاس به کمک همکارانش تلاش دیگری در جهت ارائه رابطه‌ای برای سخت شدگی کششی بتن با استفاده از منحنی‌های لنگر- انحنای تیرهای بتن مسلح و روشی که در یوروکد ارائه شده بود، انجام داد [۲۹]. او رابطه بدست آمده را با به کاربردن آن در نرم افزار اجزاء محدود صحت سنجی کرد.

در این تحقیق یک روش ساده برای پیش‌بینی رفتار خمشی تیرها و دال‌ها با استفاده از رویکرد لایه‌ای ارائه شده است. منحنی‌های لنگر-انحنای بدست آمده از این روش و با به کارگیری مدل‌های کششی مختلف، با منحنی‌های لنگر-انحنای آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار می‌گیرند. این منحنی‌های آزمایشگاهی از آزمایشاتی که روی ۱۱ نمونه آزمایش شده توسط نویسندگان این تحقیق انجام شده بدست آمده است. نمونه‌های مورد آزمایش دال‌ها و تیرهای تک سوراخه بودند که تحت بار خمشی قرار گرفته اند. در نهایت مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی منجر به معرفی مناسب‌ترین رابطه تنش- کرنش کششی برای پیش‌بینی رفتار پساترک دال‌های مجوف شده است.

## ۲- نظریه

رفتار بتن مسلح ترک خورده بسیار متفاوت از بتن ساده ترک خورده است و این به علت بتن‌های سالم دارای ظرفیت کششی مابین ترک‌هاست که به واسطهٔ میلگردها به هم دوخته شده‌اند. این پدیده سخت شدگی کششی نام دارد. تحقیقات موجود تفاوت

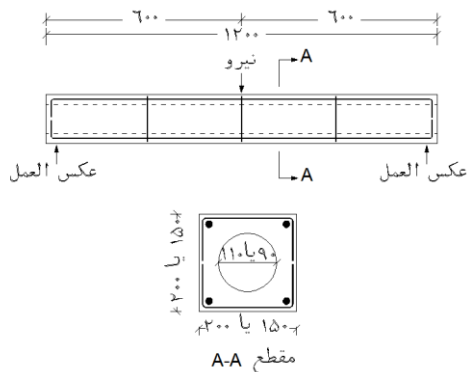
سازه با استفاده از روش‌های عددی اثر می‌گذارد. روابط متعددی برای بتن کششی در مطالعات معرفی شده‌اند که اثر سخت شدگی کششی را در دل دارند. در این تحقیق تعدادی از این روابط که جهت به کار بردن در روش لایه‌ای مناسب هستند، برای پیش‌بینی رفتار خمشی دال‌های مجوف به کار گرفته شده‌اند. اکثر این روابط برای دال‌ها و تیرهای توپر ارائه شده‌اند. در سال ۱۹۸۵ او کامورا و مائیکاوا یک مدل اجزاء محدود ساده و یک مدل کششی برای بتن که در آن اثر سخت شدگی کششی لحاظ شده بود پیشنهاد کردند [۳۰]. آنها نتایج آنالیزها را با داده‌های آزمایشگاهی موجود صحت سنجی نموده و محققین دیگر را نیز به صحت سنجی این رابطه با نتایج آزمایشگاهی تشویق کردند. در سال ۱۹۸۶ و کچیو و کالینز تعداد ۳۰ پل بتن مسلح را تحت انواع بارگذاری‌های داخل صفحه مورد آزمایش قرار دادند که منجر به ارائه تئوری اصلاح شده میدان فشاری<sup>۱</sup> گشت [۳۵]. آنها در نهایت یک رابطه تنش اصلی میانگین- کرنش اصلی میانگین برای بتن کششی ارائه نمودند. در سال ۱۹۸۷ یک رابطه برای تعریف سخت شدگی کششی در دال‌های مجوف توسط اودومی و کلارک ارائه شد [۱۷]. آنها با انجام آزمایش‌های خمشی روی نوارهایی از دال‌های مجوف به این رابطه دست یافتند. لازم به ذکر است که رابطه ارائه شده توسط اودومی و کلارک از معدود روابطی است که به طور خاص برای دال‌های مجوف و رفتار بعد از ترک آنها ارائه شده است. در سال ۱۹۹۰ پراخیا و مورلی اثر پارامترهای مختلف را بر روی سخت شدگی کششی مورد بررسی قرار دادند [۳۲]. آنها رابطه‌ای که توسط کاریرا و چو در سال ۱۹۸۴ برای سخت شدگی کششی ارائه کرده بودند را مورد مطالعه قرار داده و ضرایب تجربی آن رابطه را بر اساس نتایج آزمایشات کلارک و کرانستن و همچنین آزمایشات کلارک و اسپیرز [۳۶ و ۳۷] اصلاح نمودند. تورس و همکارانش در سال ۲۰۰۴ یک رابطه تک محوری برای بتن کششی که قبلاً توسط دامیانیک و اوون [۳۸] ارائه شده بود مورد بررسی قرار دادند [۳۴]. آنها روشی برای انتخاب صحیح مقادیر بهینه ضرایب این رابطه جهت استفاده در آنالیز خمشی ارائه کردند. در سال ۲۰۰۴ کاکلائوسکاس نیز یک رابطه تنش و کرنش میانگین برای بتن ترک خورده در کشش ارائه کرد [۲۸]. این رابطه از

<sup>۱</sup> Modified compression field theory

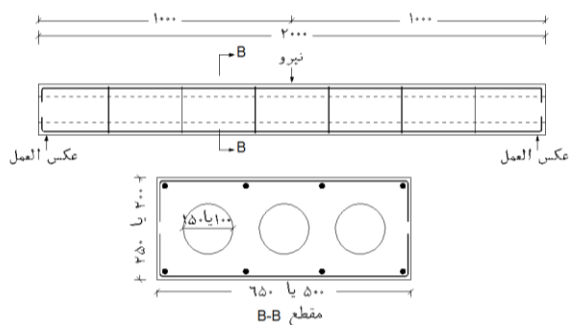
شده است. در تحقیق حاضر علاوه بر این رابطه، روابط دیگری که در تحقیقات گذشته برای دال‌ها و تیرهای توپر ارائه شده است مورد بررسی قرار گرفته اند و با مقایسه نتایج عددی حاصل از به کارگیری این روابط با نتایج آزمایشگاهی مناسب‌ترین رابطه کششی بتن برای پیش‌بینی رفتار خمشی بعد از ترک دال‌های مجوف معرفی میشود.

### ۳- برنامه آزمایشگاهی

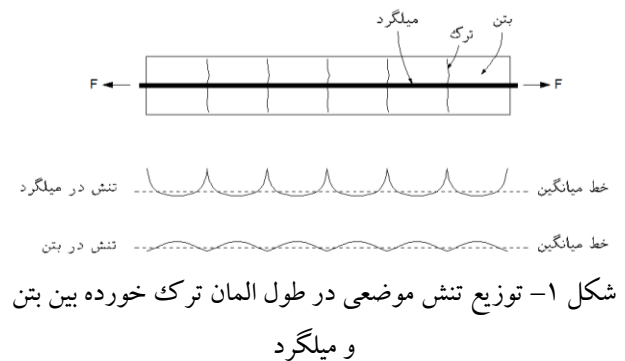
آزمایشات شامل آزمایش های خمشی بر روی ۱۱ نمونه با ابعاد واقعی است که به دو دسته تقسیم شده اند. گروه نمونه های تیری (گروه B) که شامل نوارهای طولی از دال‌های مجوف با یک سوراخ بوده و گروه نمونه های دالی (گروه S) که شامل دال‌های سه سوراخه می‌باشند. هر دو گروه از بتن مسلح ساخته شده و تحت بارگذاری تک نقطه ای در وسط دهانه قرار گرفته اند (Error! Reference source not found. و شکل ۴). مشخصات کامل نمونه ها در جدول ۱ ارائه شده است. منحنی های لنگر-انحنای آزمایشگاهی از اندازه گیری بار و تغییر مکان وسط دهانه استخراج شده است که در بخش بعدی با نتایج عددی مقایسه میشوند.



شکل ۳- جزئیات نمونه آزمایشگاهی تیری (گروه B)- ابعاد به میلی‌متر



چشمگیری بین نتایج آزمایشگاهی و نتایج عددی به دست آمده از مدل‌های کاملاً ترک خورده نشان داده اند [۱۷]. علت این تفاوت نادیده گرفتن اثر سخت شدگی کششی در مدل کاملاً ترک خورده است. شکل ۱ یک تیر ترک خورده را نمایش می‌دهد. مطابق این شکل در سطح ترک تنش کششی در میلگرد حداکثر و تنش کششی بتن صفر می‌باشد. از سوی دیگر در فواصل میانی مابین دو ترک، تنش کششی در بتن حداکثر و تنش کششی میلگردها به حداقل می‌رسد. این تغییرات تنش‌ها بر مشخصات میانگین این تیر از جمله رابطه تنش میانگین- کرنش میانگین و همچنین ظرفیت نهایی اثرگذار می‌باشد.



شکل ۲- دال مجوف بتنی

در این تحقیق رفتار بعد از ترک دال‌ها مجوف یکطرفه مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع بار و تنش در دال‌های مجوف به علت اثرات موضعی سوراخ‌ها متفاوت از دال‌های توپر می‌باشد. تغییر شکل‌ها و اعوجاج‌های احتمالی سوراخ‌ها بر روی سختی خمشی و رفتار بعد از ترک این نوع دال‌ها تأثیر می‌گذارد [۱۳]. بنابراین روابط سخت شدگی کششی ارائه شده برای دال‌های توپر مناسب این دال‌ها نمی‌باشند. رابطه سخت شدگی کششی ارائه شده توسط اودویی و کلارک در سال ۱۹۸۷ از محدود روابطی است که مختص دال‌های مجوف و رفتار بعد از ترک این دال‌ها ارائه

شکل ۴- جزئیات نمونه آزمایشگاهی دالی (گروه S) - ابعاد به میلیمتر

جدول ۱- مشخصات نمونه های مورد آزمایش

نوع نمونه	(گروه B)						(گروه S)				
	B-۱	B-۲	B-۳	B-۴	B-۵	B-۶	S-۷	S-۸	S-۹	S-۱۰	S-۱۱
شماره											
تعداد سوراخ	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۳	۳	۳	۳	۳
عمق × عرض (mm×mm)	۱۵۰×۱۵۰	۱۵۰×۱۵۰	۱۵۰×۱۵۰	۲۱۰×۲۱۰	۲۱۰×۲۱۰	۲۱۰×۲۱۰	۲۰۰×۵۰۰	۲۰۰×۵۰۰	۲۵۰×۶۵۰	۲۵۰×۶۵۰	۲۵۰×۶۵۰
قطر سوراخ $d_v$ (mm)	۹۰	۹۰	۹۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۱۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰
نسبت قطر سوراخ به عمق مقطع ( $d_v/h$ )	۰.۶	۰.۶	۰.۶	۰.۵۲	۰.۵۲	۰.۵۲	۰.۵	۰.۵	۰.۶	۰.۶	۰.۶
میلگردهای کششی	تعداد	۲	۲	۲	۲	۲	۴	۴	۶	۴	۴
	قطر میلگرد (mm)	۸	۸	۱۰	۸	۸	۱۰	۸	۸	۸	۸
	پوشش بتنی میلگرد (mm)	۱۱	۱۱	۱۰	۲۱	۲۱	۲۰	۲۱	۲۱	۲۱	۲۱
	درصد میلگرد (%)	۰.۴۴	۰.۴۴	۰.۶۹	۰.۲۲	۰.۲۲	۰.۳۵	۰.۳۱	۰.۲	۰.۱۸	۰.۱۲
میلگردهای برشی	تعداد	-	-	-	-	-	-	-	-	-	۲
	قطر میلگرد (mm)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	۸
	فواصل (mm)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	۳۰
سن نمونه در زمان بارگذاری به روز	۳۷۰	۳۱۵	۳۰۰	۳۷۰	۳۱۵	۳۰۰	۲۱۳	۲۱۲	۲۱۱	۲۱۲	۲۱۱
مقاومت فشاری ۲۸ روزه روی نمونه مکعبی (Mpa)	۵۲	۳۶	۳۹.۸	۵۲	۳۹.۸	۳۶	۲۴.۵	۲۴.۵	۲۴.۵	۲۴.۵	۲۴.۵

#### ۴- مطالعات عددی

همچنین در سال ۲۰۱۲ تکنیکی مبنی بر روش لایه‌ای برای به دست آوردن تغییر مکان اعضای بتنی تحت بارگذاری درازمدت ارائه کردند [۴۰]. در این تحقیق نیز از این روش برای بدست آوردن منحنی لنگر-انحنای تیرها و دال‌های سوراخدار مورد مطالعه استفاده شده است. در این روش فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.

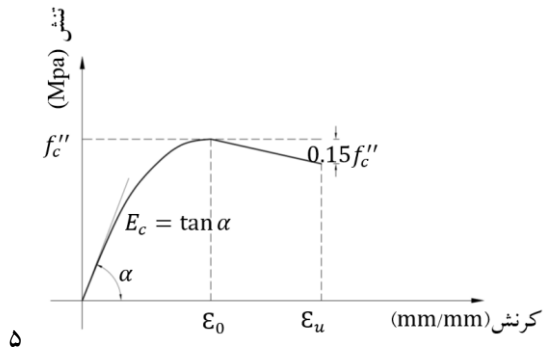
الف) صفحات مسطح، مسطح باقی میمانند. این فرضیه بر توزیع خطی کرنش در ارتفاع مقطع دلالت دارد.

ب) پیوستگی کامل بین میلگرد و بتن موجود است. اثر لغزش میلگردها در رابطه سخت شدگی کششی بتن لحاظ میشود.

ج) مدل ترک پخشی مورد استفاده قرار میگیرد. در این مدل تنشها و کرنشها به صورت میانگین بوده و سخت شدگی کششی بتن توسط بخش نزولی مدل رفتاری بتن کششی معرفی میشود.

در این روش مقطع به لایه‌هایی افقی از بتن و میلگرد که هر لایه مدل ساختاری مختص خود را دارا می‌باشد، تقسیم میشود. با نوشتن

به منظور آزمون مدل‌های کششی مختلف بتن در پیش بینی رفتار خمشی دال‌های مجوف، روش ساده‌ای مبنی بر روش لایه‌ای در این بخش معرفی می‌شود. با استفاده از این روش نمودارهای لنگر-انحنا برای نمونه‌های مختلف به دست آمده و در نهایت با نمودارهای لنگر-انحنای آزمایشگاهی مقایسه می‌شود. در ادامه به تشریح این روش پرداخته میشود. روش تحلیل لایه‌ای توسط محققین مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است. از این میان می‌توان به وکچو اشاره کرد که از این روش برای پیش‌بینی منحنی بار تغییر مکان تیرها استفاده کرده است [۳۵]. کاکلائوسکاس و قابوسی نیز در سال ۲۰۰۱ روشی بر اساس مدل لایه‌ای برای به دست آوردن رابطه تنش کرنش کششی بتن ارائه کردند. آنها آزمایشات خمشی با بارگذاری کوتاه مدت روی نمونه‌هایی ترتیب دادند و با استفاده از روش لایه‌ای مزبور منحنی تنش-کرنش کششی بتن را از نتایج آزمایشگاهی استخراج کردند. کاکلائوسکاس و همکارانش



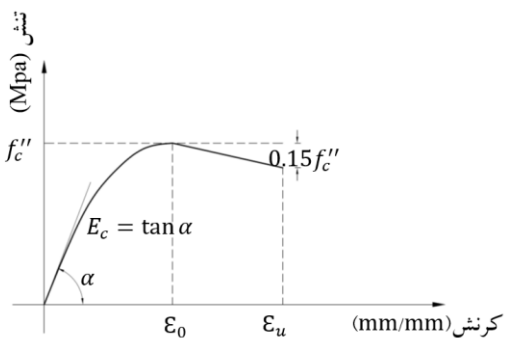
نمایش داده شده است. این نمودار قبل از رسیدن به کرنش معادل تنش ماکزیمم سهموی بوده و بعد از آن به صورت خطی تنش تا رسیدن به کرنش نهایی کاهش می یابد.

معادله ارائه شده برای رفتار فشاری بتن در بارگذاری خمشی به ترتیب زیر می باشد که در این روابط  $f_c'$  تنش ماکزیمم فشاری در نمونه استوانه ای استاندارد و  $\epsilon_u$  کرنش نهایی بتن در فشار بوده که برابر  $0.0038$  پیشنهاد شده است.

$$f_{cc} = \begin{cases} f_c'' \left( \frac{2\epsilon_c}{\epsilon_0} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right) & \epsilon_c < \epsilon_0 \\ f_c' \left( 1 - 0.15 \frac{\epsilon_c - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) & \epsilon_0 < \epsilon_c < \epsilon_u \end{cases} \quad (1)$$

$$\epsilon_0 = \frac{2f_c''}{E_c} \quad (2)$$

$$f_c'' = 0.85 f_c' \quad (3)$$



شکل ۵- مدل اصلاح شده هوگنشتاد برای بتن فشاری [۴۱]

### ۵-۲ مدل ساختاری بتن کششی

در اکثر مدل های اجزاء محدود مبتنی بر محیط های پیوسته، اثر سخت شدگی کششی در رابطه تنش-کرنش کششی مصالح بتن لحاظ می شود. ۹ رابطه تنش-کرنش که در تحقیقات گذشته برای بتن کششی ارائه شده اند، در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته اند. منحنی این روابط در جدول ۲ نمایش داده شده است. اثر

معادلات تعادل برای لایه ها میتوان مقطع را تحلیل نمود. بر اساس این روش و با چشم پوشی از اثر برش، یک برنامه کامپیوتری با استفاده از نرم افزار متلب<sup>۱</sup> برای تحلیل مقاطع سوراخدار و بدست آوردن منحنی لنگر-انحنای مقاطع تهیه و ارائه شده است. در این برنامه مقطع به تعدادی لایه تقسیم بندی شده و مدل ساختاری مناسب (بتن فشاری، بتن کششی و یا فولاد) به هر لایه اختصاص می یابد. با نوشتن روابط تعادل و بدست آوردن ارتفاع تار خنثی برای هر انحنای فرضی، با استفاده از نیروی هر لایه و مختصات آن نسبت به تار خنثی، لنگر خمشی محاسبه میشود. منحنی لنگر-انحنا به دست آمده از این روش عددی و با استفاده از روابط کششی مختلف برای بتن با منحنی های لنگر-انحنای آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته و مناسب ترین رابطه کششی برای پیش بینی رفتار خمشی دال های مجوف پیشنهاد میگردد. مدل های ساختاری مورد استفاده برای مصالح بتن فشاری و کششی و مصالح میلگردها در بخش های بعدی آورده شده است.

### ۵-۱ مدل ساختاری مصالح

#### ۵-۱-۱ مدل ساختاری بتن فشاری

طی تحقیقات گذشته مطالعات بسیاری روی رفتار فشاری بتن صورت گرفته است که منجر به ارائه روابط مختلف جهت تبیین رفتار فشاری بتن شده است. برای رفتار بتن فشاری در مدلسازی عددی از مدل اصلاح شده هوگنشتاد استفاده گردیده است. هوگنشتاد در سال ۱۹۵۱ مطالعه ای آزمایشگاهی و عددی روی اعضای بتن مسلح تحت بارگذاری همزمان خمشی و محوری انجام داد که در نهایت منجر به ارائه روابط ریاضی برای رفتار فشاری بتن شد [۴۱]. در مدل اصلاح شده هوگنشتاد، تنش ماکزیمم فشاری برای نمونه تحت بارگذاری خمشی برابر  $0.85$  مقاومت فشاری استوانه استاندارد در نظر گرفته شده است. نمودار این رابطه در

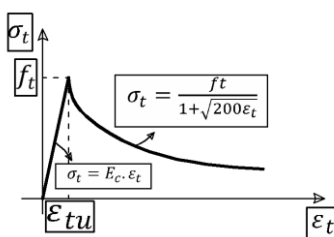
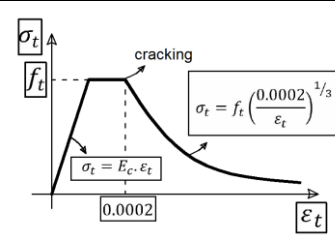
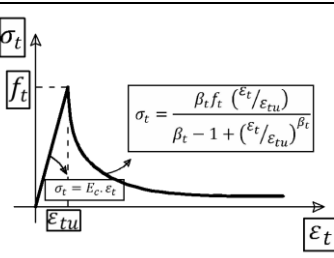
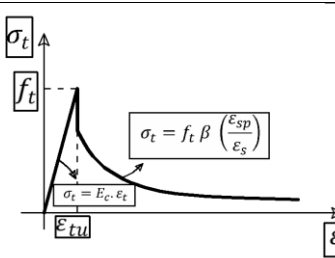
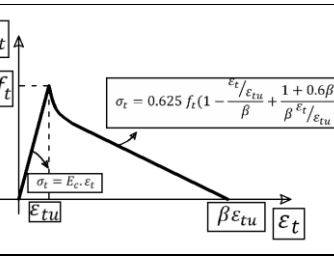
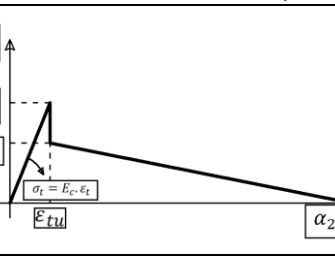
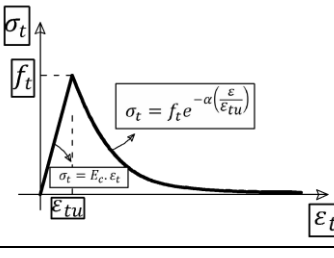
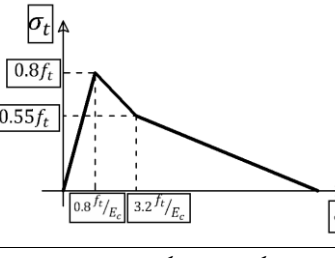
<sup>1</sup> MATLAB

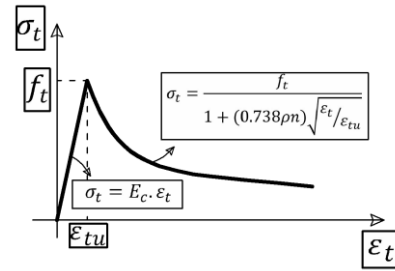
جهت مدل کردن رفتار فولاد در این تحقیق از مدل کلاسیک الاستو پلاستیک دوخطی استفاده شده است. این مدل که در تحقیقات بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است [42-44]، در **Error! Reference source not found.** نمایش داده شده است. مقادیر تنش مجاز و نهایی و کرنش های متناظر با آنها در آزمایشگاه با استفاده از آزمایش استاندارد کشش آرماتور استخراج شده است.

سخت شدگی کششی در تمام این روابط لحاظ شده است. همچنین روابط به نحوی انتخاب شده اند که معادله آنها قابل به کارگیری در مدل عددی پیشنهادی باشد. در این تحقیق با استفاده از مدل عددی پیشنهاد شده تمام این روابط مورد آزمایش قرار گرفته تا در نهایت مناسب ترین آنها برای پیش بینی رفتار بعد از ترک داکهای مجوف بتنی تحت خمش معرفی گردد.

### ۳-۵ مدل ساختاری فولاد

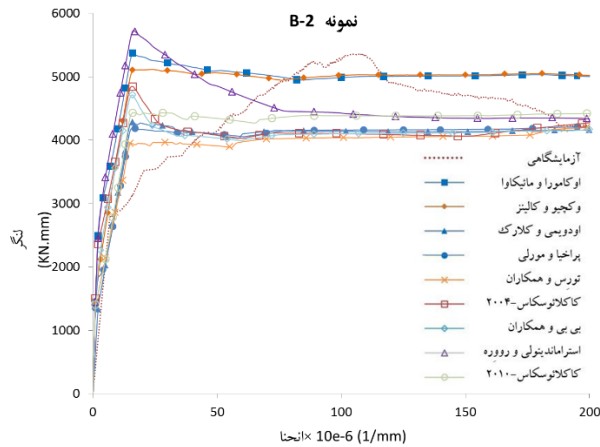
جدول ۲- منحنی های مختلف رفتار کششی بتن

<p>و کچیو و کالینز (۱۹۸۶) [۳۵]</p> 	<p>او کامورا و مائیکاوا (۱۹۸۵) [۳۰]</p> 
<p>پراخیا و مورلی (۱۹۹۰) [۳۲]</p> 	<p>اودیمی و کلارک (۱۹۸۷) [۱۷]</p> 
<p>کاکلانوسکاس (۲۰۰۴) [۲۸]</p> 	<p>تورس و همکاران (۲۰۰۴) [۳۴]</p> 
<p>استراماندنولی و رووره (۲۰۰۸) [۳۳]</p> 	<p>بی بی و همکاران (۲۰۰۵) [۲۵]</p> 
<p>کاکلانوسکاس و همکاران (۲۰۱۰) [۲۹]</p>	<p>کاکلانوسکاس و همکاران (۲۰۱۰) [۲۹]</p>



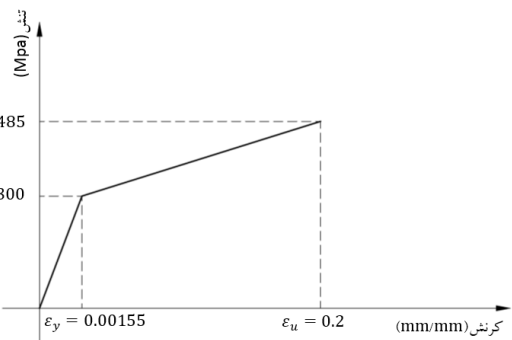
### ۶- بررسی نتایج

در شکل های ۷ الی ۱۶ منحنی های لنگر- انحنای آزمایشگاهی و عددی برای نمونه های تیری و دالی (گروه B و گروه S) مورد مقایسه قرار گرفته اند. منحنی های آزمایشگاهی از اندازه گیری بار و تغییر مکان در آزمایشها و تبدیل آنها به لنگر و انحنای استفاده از معادلات کلاسیک تغییر شکل در تیرها به دست آمده و منحنی های عددی با استفاده از روش عددی که در بخش ۴ تشریح شد و با به کار گیری روابط کششی مختلف برای بتن به دست آمده اند.

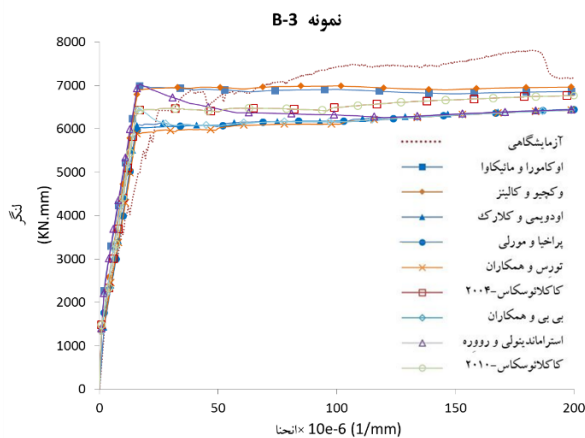


شکل ۸- نمودار لنگر انحنای نمونه تیری B2

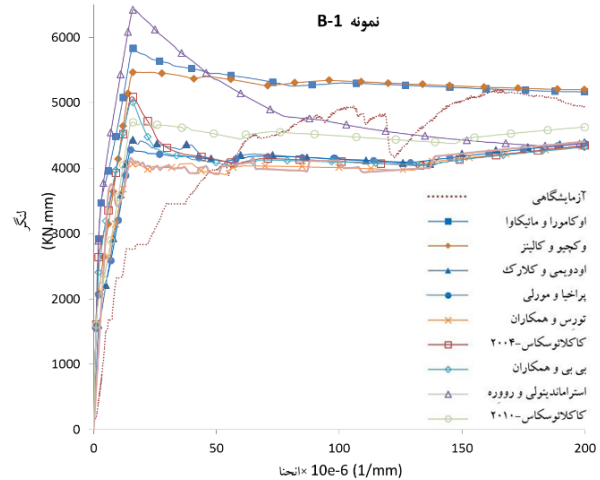
همانطور که در اشکال ۷ الی ۱۲ قابل مشاهده است در نمونه های تیری شکل تک سوراخه با افزایش درصد فولاد، فراوانی تغییرات منحنی های عددی در ناحیه بعد از ترک کاهش می یابد. این به این معنی است که سخت شدگی کششی در درصد های بالای فولاد اثر قابل توجهی روی رفتار نمونه ها ندارد.



شکل ۶- مدل رفتاری فولاد



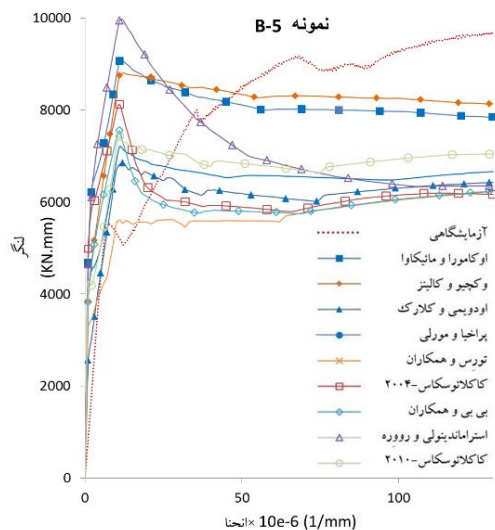
شکل ۹- نمودار لنگر انحنای نمونه تیری B3



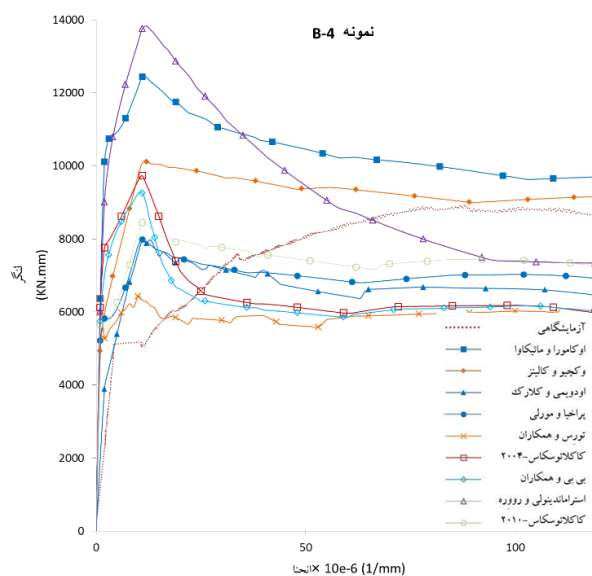
شکل ۷- نمودار لنگر انحنای نمونه تیری B1



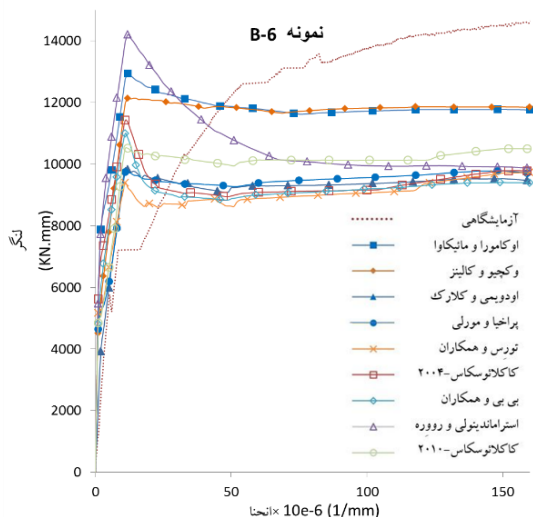
رفتار بعد از ترک دال مجوف ...



شکل ۱۱- نمودار لنگر انحنای نمونه تیری B5



شکل ۱۰- نمودار لنگر انحنای نمونه تیری B4

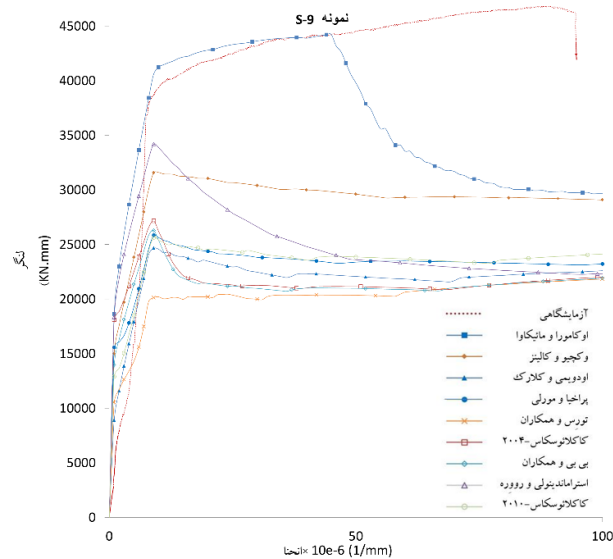


شکل ۱۲- نمودار لنگر انحنای نمونه تیری B6

در میان روابط مورد بررسی و با توجه به منحنی های لنگر انحنای فوق، رابطه ارائه شده توسط توریس و همکاران، رابطه کاکلاتوسکاس در سال ۲۰۰۴ و رابطه بی بی و همکارانش در تمام مدل های تیری و دالی نتایج بسیار محافظه کارانه ای ارائه می دهند. لنگر قابل تحمل واقعی بدست آمده از آزمایشات در نمونه های تیری ۲۵ تا ۵۵ درصد بیشتر از نتایج عددی و در نمونه های دالی از ۹۰ تا ۱۲۰ درصد بیشتر می باشد. در هر سه این مدل ها که در جدول ۲ قابل ملاحظه می باشند، بخش نزولی نمودارها در نقطه مشخصی با محور افقی (محور کرنش) برخورد کرده که بر این اساس بعد از این نقطه بتن مقاومت کششی نخواهد داشت. به نظر می رسد این فرم رفتاری به درستی رفتار بتن کششی در دال های مجوف را شبیه سازی نمی کند.

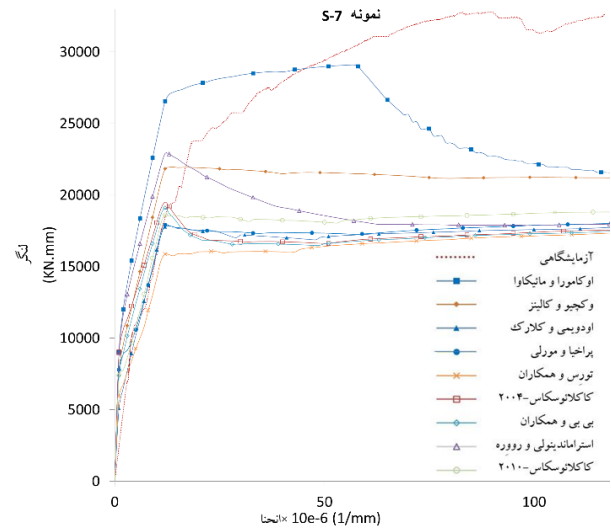
اشکال ۱۳ تا ۱۶ منحنی های لنگر-انحنای مربوط به نمونه های دالی سه سوراخه را به نمایش گذاشته است. در این نمونه ها فراوانی تغییرات نتایج عددی بسیار بیشتر از نمونه های تیری است که نشان دهنده حساسیت نتیجه به رابطه انتخابی برای بتن کششی می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که انتخاب رابطه مناسب برای رفتار بتن کششی جهت پیش بینی رفتار دال مجوف از حساسیت بالایی برخوردار است. دال ها معمولاً جزو اعضای با درصد میلگرد پایین محسوب میشوند. در اعضای بتنی با درصد میلگرد پایین، درصد مشارکت سخت شدگی کششی بالاتر می باشد. این پدیده توسط محققین در تحقیقات گذشته نیز ثابت شده است [۳۳] و [45]. در اکثر استانداردهای طراحی حداقل آرماتورهای خمشی دال ها برابر آرماتورهای حرارتی می باشد [46] و [47]. در نمونه های مورد آزمایش نیز این مقدار حداقل رعایت شده است لیکن همچنان درصد فولاد آنها در مقایسه با نمونه های تیری کم است. طبق موارد فوق الذکر با توجه به اینکه دال ها از اعضای با درصد فولاد پایین محسوب میشوند، انتخاب مدل رفتاری مناسب برای بتن کششی جهت پیش بینی رفتار این اعضا از حساسیت و اهمیت دوچندان برخوردار است.

به دست آمده با رابطه پراخیا و مورلی و رابطه کاکلائوسکلاس و همکاران ۲۰۱۰ نزدیک است. همانطور که در جدول جدول ۲ نیز مشاهده می شود، این سه رابطه نیز از لحاظ شکل نمودار مشابه بوده و بنابراین نتایج یکسانی نیز ارائه می دهند.

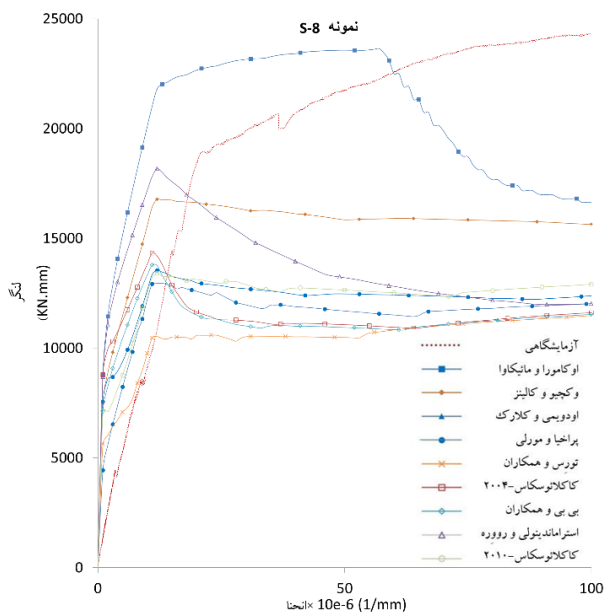


شکل ۱۵- نمودار لنگر انحنا نمونه دالی S9

همانطور که در اشکال ۷ الی ۱۲ قابل ملاحظه است، این ۳ مدل رفتاری در نمونه های تیری نتایج مورد قبولی ارائه نمودند ( با تفاوت حداکثر ۲۵ درصد بین نتایج عددی و آزمایشگاهی) ولی مطابق اشکال ۱۲ الی ۱۶ نتایج در دال های مجوف بسیار محافظه کارانه می باشد لنگر قابل تحمل واقعی بدست آمده از آزمایشات در نمونه های دالی ۶۰ تا ۹۰ درصد بیشتر از نتایج عددی است. هر چند این تفاوت در مقایسه با سه رابطه قبلی کمتر شده است، لیکن هنوز که این ۳ رابطه برای دال های مجوف با درصد آرماتور پایین که اثر سخت شدگی کششی در آنها بیشتر از تیرها است، کارایی لازم را ندارند.



شکل ۱۳- نمودار لنگر انحنا نمونه دالی S7



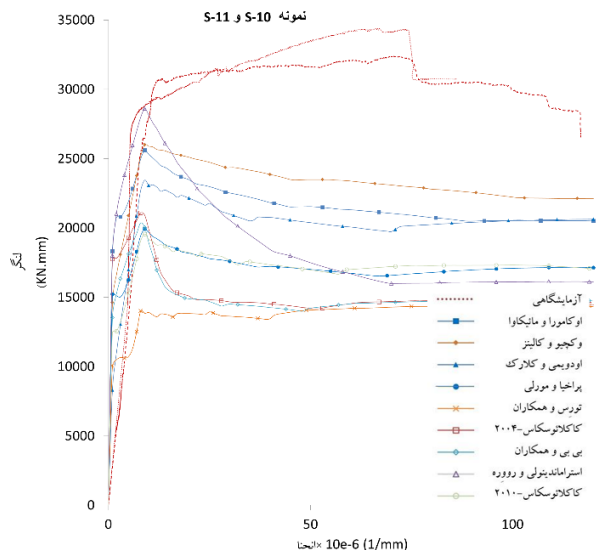
شکل ۱۴- نمودار لنگر انحنا نمونه دالی S8

از میان مدل های رفتاری مورد بحث، تنها مدلی که مختص دال های مجوف و با مطالعات آزمایشگاهی روی نمونه های مجوف به دست آمده، مدل اودویی و کلارک است. اودویی و کلارک در سال ۱۹۸۷ با انجام آزمایشاتی روی تیرهای تک سوراخه، یک رابطه برای سخت شدگی کششی در دال های مجوف بتن مسلح پیشنهاد کردند. این رابطه توسط نویسندگان این مقاله مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است و رابطه تنش کرنش با استفاده از رابطه سخت شدگی کششی بدست آمده است که در جدول ۲ قابل ملاحظه است. در شکل ۷ الی شکل ۱۶ نشان داده شده است که نتایج بدست آمده با استفاده از رابطه اودویی و کلارک به نتایج

برای پیش‌بینی رفتار خمشی دال‌های مجوف بتن مسلح بعد از ترک انتخاب شود. یک برنامه کامپیوتری بر مبنای روش لایه‌ای کد نویسی شد تا بتوان به وسیله آن منحنی لنگر-انحنای مقاطع سوراخ‌دار را با استفاده از مدل‌های ساختاری مصالح بتن و فولاد به دست آورد. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از آزمایشات انجام شده روی دال‌ها و تیرهای سوراخ‌دار مقایسه شد. از آنجاییکه اثر سخت‌شدگی کششی در اعضای با درصد آرماتور پایین مانند دال‌ها بسیار قابل توجه است، نتایج تحلیل عددی نسبت به انتخاب مدل ساختاری مناسب برای بتن کششی بسیار حساس است. همانطور که در تحقیقات نیز آمده است، این حساسیت خصوصاً وقتی عضو بتنی در معرض بار خمشی قرار دارد دو چندان می‌گردد [۳۳] و [48]. برای تخمین رفتار بار-تغییر مکان سازه‌های بتنی تلاش‌های متعددی توسط محققین مختلف صورت گرفته است. لیکن حتی بهترین پیش‌بینی‌ها هم هنوز با نتایج آزمایشگاهی مطابقت خوبی ندارد. در این تحقیق تعدادی از معادلات ساختاری پیشنهاد شده در تحقیقات برای بتن کششی جهت به کارگیری در مدل عددی انتخاب شدند. تمام روابط مورد استفاده اثر سخت‌شدگی کششی را نیز شامل می‌شدند. رابطه‌ای که توسط اودویمی و کلارک در سال ۱۹۸۷، پراخیا و مورلی در سال ۱۹۹۰ و کاکلاتوسکاس در سال ۲۰۱۰ ارائه شده توانست رفتار تیرهای تک سوراخه را پیش‌بینی کند. ولی نتایج بدست آمده با این روابط برای دال‌های مجوف چندسوراخه پاسخ‌های بسیار محافظه کارانه‌ای ارائه می‌کند. از میان روابط مورد بحث مناسبترین رابطه کششی بتن برای پیش‌بینی رفتار خمشی دال‌های مجوف مسلح بعد از ترک، رابطه‌ای است که توسط وکچو و کالینز در سال ۱۹۸۶ تحت تئوری اصلاح شده میدان فشاری ارائه شده بود.

#### ۸- مراجع

- [1] Al-Shaarbaaf I A, Al-Azzawi A A and Abdulsattar R A, "State of The Art Review on Hollow Core Slabs", ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences 13(9):3240-3245, (2018).  
 [2] ASSP (Association of Manufacturers of Prestressed Hollow Core Floors), "The Hollow Core Floor Design and Applications, Manual of ASSP", Published by Offset Print Veneta, Verona, Italy, 1th edition.  
 [3] Crisfield M A and Twemlow R P, "The Equivalent Plate Approach for The Analysis of



شکل ۱۶- نمودار لنگر انحنای نمونه دالی S10 و S11

۳ رابطه دیگری که در جدول ۲ نشان داده شده است، رابطه او کامورا و مائیکاوا، رابطه وکچو و کالینز و رابطه استراماندینولی و رووره است. این روابط مقاومت نهایی بیشتری در مقایسه با سایر روابط ارائه کرده‌اند. با وجود اینکه این ۳ رابطه نتایج غیرمحافظه کارانه‌ای برای نمونه‌های تیری نشان داده‌اند، ولی در نمونه‌های دالی شکل در مقایسه با بقیه روابط نتایج عددی به نتایج آزمایشگاهی نزدیکتر است. آنالیز عددی با استفاده از رابطه کششی استراماندینولی و رووره در فاز ابتدایی بعد از ترک، مقادیر بالای مقاومت را در مقایسه با ۲ رابطه دیگر نشان می‌دهد ولی با افزایش بار نتایج ۳ رابطه تقریباً با هم انطباق دارند. استفاده از رابطه او کامورا و مائیکاوا در نمونه‌های دال مجوف نتایج بسیار نزدیک به نتایج آزمایشگاهی ارائه کرده است ولی در بعضی نقاط نتایج غیر محافظه کارانه است. بنابراین با توجه به تمامی موارد فوق‌الذکر از میان تمام روابط فوق رابطه ارائه شده، رابطه وکچو و کالینز مناسب‌ترین پیش‌بینی را برای رفتار خمشی دال‌های مجوف ارائه کرده است. تفاوت نتایج عددی با استفاده از این رابطه و نتایج آزمایشگاهی به حدود ۴۰ درصد رسیده است. همانطور که پیشتر عنوان شد، این تفاوت در نتایج عددی با استفاده از روابط دیگر تا ۱۲۰ درصد رسیده بود.

#### ۷- نتیجه‌گیری

چند رابطه تنش-کرنش برای بتن کششی که در تحقیقات ارائه شده‌اند، در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفت تا مناسب‌ترین رابطه

- Stiffening in Longitudinal Sections of Circular Voided Concrete Slabs”, Proceedings of the Institution of Civil Engineers 83(4): 861-874, (1987).
- [18] Pajari M, (2010) “Prestressed Hollow Core Slabs Supported on Beams”, Finnish shear tests on floors in 1990–2006. VTT Technical Research Centre of Finland.
- [19] Sabr Y N, Jarallah H KH and Abdulkareem H I, “Assessment The Shear Behavior of Sustainable Thick Hollow Core Slab Using Experimental and Nonlinear Finite Element Modelling”, Anbar Journal of Engineering Science 8(1): 35-43, (2014).
- [20] Sgambi L, Gkoumas K and Bontempi F, “Genetic Algorithm Optimization of Precast Hollow Core Slabs”, Techno Press Journal 13(3): 389-409, (2014).
- [21] Stanton J F, “Response of Hollow-Core Slab Floors to Concentrated Load”, PCI Journal, 37(4): 98-113, (1992).
- [22] Wariyatno N G, Haryanto Y and Sudibyo G H, “Flexural Behavior of Precast Hollow Core Slab Using PVC Pipe and Styrofoam with Different Reinforcement”, Procardia Engineering 171: 909-916, (2017).
- [23] Xie J Zh, “Macroscopic Elastic Constitutive Relationship of Cast-In-Place Hollow-Core Slabs”, Journal of Structural Engineering 135(9): 1040-1047, (2009).
- [24] Barros M, Martins R A F and Ferreira C C, “Tension Stiffening Model with Increasing Damage for Reinforced Concrete”, Engineering Computations 18(5-6):759–785, (2001).
- [25] Beeby A W, Scott R H and Jones A E K, “Revised Code Provisions for Long-Term Deflection Calculations”, Structures and Buildings 158(1):71-75, (2005).
- [26] Carreira D J and Chu K, “Stress- Strain Relationship for Reinforced Concrete in Tension”, ACI Journal 21-28, (1986).
- [27] Clark L A and Cranston W B, “The Influence of Bar Spacing on Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs”, In Advance Concrete Slab Technology, 118-128, (1979).
- [28] Kaklauskas G, “Flexural Layered Deformational Model of Reinforced Concrete Members”, Magazine of Concrete Research 56(10): 575–584, (2004).
- [29] Kaklauskas G, Gribniak V and Bacinskas D, “Tension Stiffening Relationships Based on Design Code Provisions”, in 3rd fib International Congress, Washington, D.C., USA, (2010).
- [30] Okamura H, Maekawa K, “Verification of Modelling for Reinforced Concrete Finite Element”, In Finite Element Analysis of Reinforced Cellular Structures”, Civil Engineering and Public Works Review 259-263, (1971).
- [4] Cusens A R and Pama R P, “Distribution of Concentrated Loads on Orthotropic Decks”, The Structural Engineer 99(9): 377-385, (1969).
- [5] Arendts J G and Sanders W W, “Concrete Box Girder Bridges as Sandwich Plates”, ASCE Journal of the Structural Division 96(1): 2353 -2371, (1970).
- [6] Basu A K and Dawson J M, “Orthotropic Sandwich Plates, Supplement to Proceedings”, Institution of Civil Engineers 87- 115, (1970).
- [7] Hook I M A and Richmond B, “Western Avenue Extension -Precast Concrete Box Beams in Cellular Bridge Decks”, The Structural Engineer 48(3), (1970).
- [8] Sawko F and Willcock B K, “Computer Analysis of Bridges Having Varying Section Properties”, The Structural Engineer 45(11): 395-399, (1967).
- [9] Smyth W J R and Srinivasan S, “The Analysis of Gateshead Viaduct”, The Structural Engineer 5(2): 51-59, (1973).
- [10] Mason B, Cheung S K and Cheung M S, “Analysis of Cellular Structures by Finite Strip Method” In 5th Symposium on Engineering Applications of Mechanics, Ottawa, (1980).
- [11] Adawi A, Youssef M A and Meshaly M, “Finite Element Modelling of The Composite Action between Hollow Core Slabs and The Topping Concrete”, Engineering structures 124(1): 302-315, (2016).
- [12] Al-Azzawi A A and Abed S A, “Numerical Analysis of Reinforced Concrete Hollow-Core Slabs”, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences 11(15):9284-9296, (2016).
- [13] Bakht B, Jaeger L G, Cheung M S and Mufit A A, “The State of The Art in Analysis of Cellular and Voided Slab Bridges”, Canadian Journal of Civil Engineering 8(3): 376-391, (1981).
- [14] Cuenca E and Serna P, “Failure Modes and Shear Design of Prestressed Hollow Core Slabs Made of Fiber-Reinforced Concrete”, Composites: Part B 45(1): 952-964, (2013).
- [15] Ibrahim I S, Elliott K S and Copeland S, “Bending Capacity of Precast Prestressed Hollow Core Slabs with Concrete Toppings”, Malaysian Journal of Civil Engineering 20(2): 260-283, (2008).
- [16] Michelini E, Bernardi P and Belletti B, “Experimental And Numerical Assessment of Flexural and Shear Behavior of Precast Prestressed Deep Hollow-Core Slabs”, International Journal of Concrete Structures and Materials 14(31), (2020).
- [17] Oduyemi T O S and Clark L A, “Tension

- [43] Liew A and Gardner L, Ultimate Capacity of Structural Steel Cross-Sections Under Compression, Bending And Combined Loading, Structures,1:2-11, (2014)
- [44] Hagsten L G, Rasmussen A B, and Fiskera J, Strain Capacity of Reinforced Concrete Members Subjected to Uniaxial Tension, Procedia Engineering, 172:339-349, (2017).
- [45] Gilbert R L, "Tension Stiffening in Lightly Reinforced Concrete Slabs", Journal of Structural Engineering, 133(6):899-903, (2007).
- [46] AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials), LRFD Bridge Design Specification, AASHTO, Washington, DC, (2012).
- [47] ACI (American Concrete Institute) Building Code Requirements for Structural Concrete ACI 318M-14, ACI, Farmington Hills, NJ, USA, (2014).
- [48] Polak M A, "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Shells", PhD Thesis. University of Toronto, (1992).
- Concrete Structures Conference, Tokyo, Japan, (1985).
- [31] Petersson P, "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials", Division of Building Materials, Report TVBM 1006, (1981).
- [32] Prakhya G K V and Morley C T, "Tension-Stiffening and Moment-Curvature Relations of Reinforced Concrete Elements" ACI Structural Journal 87(5): 597-605, (1990).
- [33] Stramandinoli R S B and Rovere H L L, "an Efficient Tension-Stiffening Model for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Members", Engineering Structures 30(7): 2069-2080, (2008).
- [34] Torres L, Lo'pez-Almansa f and Bozzo L M, "Tension Stiffening Model for Cracked Concrete Flexural Members", Journal of Structural Engineering 130(8): 1242-1251, (2004).
- [35] Vecchio F J and Collins P, "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", ACI Journal 83(6): 925-933, (1986).
- [36] Clark L A and Cranston W B, "The Influence of Bar Spacing on Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs", In Advance Concrete Slab Technology 118-128, (1979).
- [37] Clark L A and Speirs D M, "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Beams and Slabs Under Short Term Load", London Cement and Concrete Association, Technical Report 42.521. 19 pp, (1978).
- [38] Damjanic F and Owen D R, "Practical Consideration for Modeling Of Postcracking Concrete Behavior For Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures" Proc., Int. Conf. on Computer Aided Analysis of the Design of Concrete Structures, Pineridge, Swansea, UK, (1984).
- [39] Scott R H, "The Short-Term Moment-Curvature Relationship for Reinforced Concrete Beams", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 75(2):725-734, (1983).
- [40] Kaklauskas G and Ghaboussi J, "Stress- Strain Relations for Cracked Tensile Concrete from RC Beam Tests", Journal of Structural Engineering 127(1): 64-73, (2001).
- [41] Hognestad E, "Study On Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members", University of Illinois, Report: University of Illinois Engineering Experiment Station, No.399, (1951).
- [42] Gizejowski M A, Barcewicz W and Salah W, "Finite Element Modelling of The Behaviour of A Certain Class of Composite Steel-Concrete Beam-to-Column Joints", Archives of civil Engineering, 1:19-56, (2010)

## Post Cracking Behavior of Hollow Core Slabs in Flexure

Maedeh Moeeni \*

PhD candidate, Department of civil engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

Javad Razzaghi Langroudi

Assistant professor, Department of civil engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

### Abstract

This study aims to investigate several well-known stress-strain relationships for tensile concrete in literature and introduces the most appropriate one for predicting flexural behaviour of reinforced concrete hollow core slabs in post cracking phase. Despite comprehensive experimental and numerical researches that are conducted to understand the performance of hollow core slabs, limited information exists about post cracking behavior and specifically the tension stiffening characteristic of this system. In the current study some relationships that were proposed by other researchers for reinforced concrete in tension and flexure are concerned. Numerical analyses were performed by a program based on a layered approach which was specifically developed for analysis of voided slabs. Different tension relationships for concrete from previous literature were implemented in the code and the numerical results were compared with experimental results. Eventually, the most appropriate tension relationship of concrete for predicting post cracking flexural behavior of hollow core slabs will be proposed.

**Keywords:** Hollow core slab, post cracking behavior, flexure, tension stiffening, numerical study.

---

\* Corresponding Author: m.moenishar@gmail.com